

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Экономический факультет

Г.Д. Ковалева

**ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ
В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ**

Курс лекций

Ответственный редактор
доктор экономических наук *Г.М. Мкртчян*

Новосибирск
2008

УДК 517.83
ББК В171я73
К 56

Ковалева Г.Д., Применение теории временных рядов в экономических исследованиях : Курс лекций / Новосибирск: Издательство НГУ, 2008. с.56

ISBN

Курс лекций «Применение теории временных рядов в экономических исследованиях» подготовлен для магистрантов Экономического факультета НГУ. Курс адаптирован к потребностям данной специальности, он содержит основные элементы практического применения теории и методики при построении различных видов моделей временных рядов и прогнозировании. В курс включены исследования экономических процессов макроэкономики, микроэкономики и финансового рынка для различных систем производственных отношений. Он направлен на совершенствование подготовки студентов в области эконометрического анализа экономических данных с применением статистических пакетов.

Курс может быть полезен для широкого круга студентов для приобретения практического и теоретического опыта применения теории временных рядов.

Издание подготовлено в рамках выполнения инновационно-образовательной программы *«Инновационно-образовательные программы и технологии, реализуемые на принципах партнерства классического университета, науки, бизнеса и государства»* национального проекта «Образование».

ISBN

© НГУ, 2008
© Ковалева Г.Д., 2008

Оглавление

Лекция 1. Объективные предпосылки циклического развития экономических процессов ..	4
Лекция 2. Теоретические модели оценки циклической динамики.....	7
Лекция 3. Временной ряд. Стационарность. Тренд. Параметрические и непараметрические способы оценивания тренда	10
Лекция 4. Модели авторегрессии и скользящего среднего и их модификации.....	15
Лекция 5. Непараметрические оценки спектра	18
Лекция 6. Исследование отклика оценок ФСП на изменения параметров расчета и циклических компонент ряда.....	24
Лекция 7. Особенности применения спектрального анализа к исследованию коротких временных рядов	29
Лекция 8. Динамические модели интервенции	36
Лекция 9. Курс рубля на российском рынке. Динамика и моделирование	44

Применение теории временных рядов в экономических исследованиях

Цель: Измерение и моделирование циклической динамики экономических процессов. Необходимость решения задач данного типа продиктована всем ходом экономического развития.

Лекция 1. Объективные предпосылки циклического развития экономических процессов

Экономический процесс формируется под воздействием множества факторов, проявление и степень влияния которых носят вероятностный характер. Тенденция роста сменяется с удивительным постоянством тенденцией падения. Это отмечается в таких индикаторах экономического развития, как ВВП, инвестиции в основной капитал, производительность труда, прибыль, заработная плата, товарные запасы, занятость.

Под циклом в широком смысле понимаем статистически устойчивую периодичность, проявляющуюся в динамике стохастических процессов. С.М. Меньшиков [1989] выделял кризисы, начинавшиеся с резкого сокращения инвестиций в основной капитал в США через 8-9 лет, в Англии через 10-11 лет, в ФРГ через 8-8,5 лет, в Японии через 9-11 лет. На них налагались промежуточные спады в динамике. Менее глубокие и менее регулярные циклы обнаружены в динамике запасов – в ФРГ с периодом 4,5-5,5 лет, в США – 3-4 года.

Эти среднесрочные и короткие колебания накладывались на волнообразные долгосрочные тенденции, характерные для развития и жизни общества. Они впервые описаны в теории длинных волн Н. Д. Кондратьевым в 1928 г. На большом множестве экономических показателей, взятых для ряда стран за длительные промежутки времени (100 и более лет), Н.Д. Кондратьев выделил усредненные по странам периоды спадов и подъемов экономической активности:

Подъемы	Спады
1789-1814	1814-1849
1849-1873	1873-1896
1896-1920	1920-1945
1945-1975	1975-1998
1998-2023	

Курсивом выделены периоды, не вошедшие в работу Н.Д. Кондратьева.

Средняя продолжительность одного длинного цикла в его оценке составляет около 50 лет. Н.Д. Кондратьев из анализа причинно-следственных связей в экономике и обществе выводит механизм образования и распространения длинной волны и рассматривает волнообразное движение как отклонение от состояния равновесия экономики. Он объясняет ее возникновение движением материальных благ с длительным сроком службы – зданий, сооружений, дорог, и т. д. Николай Дмитриевич выделял также 3-3,5 летние циклы в динамике спроса и предложения как отклонения от равновесия первого порядка. Он рассматривал 9-10 летние циклы как среднесрочные циклы, порождаемые динамикой основного капитала в оборудовании – отклонения второго порядка. Циклы 40-50 летние он относил к отклонениям от состояния равновесия третьего порядка. Кондратьев отмечал, что обновление и расширение основных капитальных благ приходится на повышательную фазу длинной волны и сопровождается радикальным изменением производительных сил общества. С.М. Меньшиков и Л.А. Клименко (1989, с. 122) отмечают: «Главную роль в возникновении длительных колебаний в экономике играют капиталовложения в

радикально новую производственную технику». В своей книге «Длинные волны в экономике» они подробно рассматривают механизм образования длинной волны, в котором акцентируют внимание на структурном характере кризиса. Авторы дают большой материал о суперпозиции циклической динамики различной длительности. Интерес в научном обществе к длинным волнам и механизму их образования то угасает (экономика на подъеме), то возникает вновь (глубокий спад экономики). Появилось много зарубежных публикаций на эту тему в 80-х годах прошлого века, когда в США разразился кризис 1974-1975 г., захвативший 80-е годы. Падение объемов производства в СССР с конца 70-х также повлекло интерес к этой теме российских ученых.

Спад длинной волны 1975-1998 г подробно анализируется в работе А.Г. Аганбегяна. В своей книге «Социально-экономическое развитие России» А.Г. Аганбегян отмечает, что Россия находилась в глубочайшем социально-экономическом кризисе, усилившемся с 1990 по 1999 г. В таблице 1 приведена глубина падения в основных социально-экономических показателях и их состояние в 2006 г относительно начала 1989 г.

Таблица 1

Глубина социально-экономического кризиса в России

Показатели	Нижняя точка кризиса, % к 1989 г.	2006 год; % к 1989 г
ВВП	56	95
Промышленность	46	80
Сельское хозяйство	54	75
Инвестиции	21	50
Реальные доходы на душу населения	53	110
Безработица (в% к численности экономически активного населения)	13	7
Депопуляция населения в тыс. чел в год	950	680

Абел Гезевич отмечал, что средний срок службы машин и оборудования ранее в развитых странах составлял 12 лет, сейчас сократился до 7-8 лет. В СССР средний срок службы машин и оборудования был также 12 лет (ниже это будет доказано на моделях. Ковалева Г.Д (1992)). Фаза последнего кризиса затянулась – она длилась в России более 10 лет, и средний срок службы оборудования вырос до максимального значения – 22 лет. В последние годы он стал сокращаться и в 2007 г приблизился к 19 годам.

Текущее положение в экономике в 2007 г А.Г. Аганбегян характеризует как переломное. По его мнению, рост инвестиций в 12-13% в год не позволит обеспечить экономический рост, необходимо существенное увеличение инвестиций и, прежде всего, в основные средства производства. Действительно, если начнется активное инвестирование в новые технологии и средства производства, в образование, здравоохранение и науку, развитие финансового сектора – это может стать реальным продолжением повышательной фазы длинной волны для России. Во всяком случае, есть над чем поработать. Задача приняла сверхактуальность в связи с разразившимся мировым кризисом.

Среднесрочный экономический цикл является наиболее изученным. Его проявление связывают с перенакоплением капитала. Под среднесрочным экономическим циклом понимают движение капиталистического производства, проходящее через фазы кризиса, депрессии, оживления, подъема.

Индикаторы :- абсолютное сокращение объемов производства;

- рост безработицы;
- сокращение прибыли;
- снижение личного потребления;
- снижение инвестиций;
- падение производительности труда;

- снижение относительной заработной платы;
- сокращение товарных запасов;
- др.

Экономические факторы по-разному воздействуют и отражают ход кризиса. Рост инвестиций знаменует начало подъема, падение инвестиций предвещает начало общего спада экономики. Абсолютная заработная плата растет на подъеме и падает в период кризиса. В основе среднесрочного кризиса лежит инвестиционный процесс, а личное потребление лишь изменяет характер колебаний. Когда амортизационный фонд начинает расти и его рост влечет техническое перевооружение, то начинается экономический подъем.

Один из определяющих факторов – технический прогресс, который реализуется в смене поколений техники. Смена поколений происходит через 8-10 лет, хотя жизненный цикл одного поколения продолжается 15-20 и более лет. Ю.В. Яковец различает смену поколений техники и научно-технические революции. Анализируя появление принципиально-новых технологий, он обосновывает три научно-технических революции в прошлом столетии и четвертую в начале этого. Их влияние оценивается опосредованно через исследование динамики производительных сил, и проявляется оно в смене экстенсивного характера роста интенсивным. Это же утверждал и известный экономист А.Н Анчишкин в своей книге «Наука-техника-экономика». Н.Д.Кондратьев писал, что хотя технический прогресс участвует в возникновении длинной волны наряду с другими порождающими его процессами, законы его развития занимают в формировании длительных подъемов и спадов экономической активности особое место. Учитывая некоторую автономность развития научно-технического прогресса, важно понять механизм и степень его влияния на развитие экономических процессов. Затронутая проблема оценки влияния научно-технического развития на динамику экономики с помощью аппарата временных рядов представляет интересную задачу, достойную магистерской диссертации.

Подводя итоги можно отметить, что в реальных показателях были выявлены 4-4.5 летние циклы в запасах, 8-9 –летние деловые циклы, 20-летние строительные циклы, 50-летние длинные волны конъюнктуры. На экономические процессы воздействуют природные, демографические и научно-технические циклы. Важно, что существуют объективные причины флуктуирующего развития, и они проявляются независимо от типов производственных отношений.

Тема циклического движения постоянно находится в сфере интересов. В 2007 г вышла статья К. Х. Зойдова в журнале «Экономическая наука Современной России» № 4(39) в издательстве РАН отдела общественных наук: «К проблеме исследования циклических процессов в советской и переходной российской экономике», где автор проводит систематизацию всех отечественных работ на данную тему.

Основное положение, отмеченное в статье, заключается в том, что циклический характер эволюции предстает как результат внутренней ограниченности любых эволюционирующих систем.

Автор отмечает, что даже в советское время, когда провозглашалась бескризисная экономика, выходили научные работы, в которых обсуждались колебания в экономике. П.Н. Тесля на теоретической модели показывает объективность циклического движения.

А. Ноткин выпустил в 1976 г работу «Ступени», где рассматривает в качестве источника неравномерного движения диспропорции в развитии I и II подразделений советской экономики. Иван Абрамов [1990 г] подтверждает в своей работе объективность циклического движения в экономическом развитии. Отстаивая тезис, что влияние управленческих решений не является главным, он доказывает, что все определяется объективным характером процессов. И. Абрамов выделяет воспроизводственные среднесрочные циклы, связанные с переориентации приоритета от группы А на производство группы Б и структурные циклы. Среднесрочные циклы И. Абрамов связывает с исчерпанием возможностей эффективного использования постоянного роста производственных капитальных вложений. Он отмечает, что в 1950 -1970 гг наблюдалось быстрое накопление капитала, это

привело к исчерпанию потенциала, вызвало рост фондоемкости и, как следствие, удорожание производства. Специфика экономики СССР приводит к увеличению продолжительности экономических циклов и, по его мнению, они продолжались 15 и более лет.

К.Х. Зоидов выделяет результат, полученный Г.Д. Ковалевой в ее работе: среднесрочные циклы в динамике макропоказателей экономики СССР в послевоенный период длительностью 8-12 лет и рассматривает предложенный ею механизм возникновения кризисной ситуации с 1983 года.

Циклической динамике применительно к проблемам отечественной экономики были посвящены работы по длинным волнам С.Меньшикова и Л.Клименко (1989), А.Полетаева и И.Савельевой (1993), В.Маевского (1994), Ю.Яковца (1993, 1997, 1999), К.Рудого (2004).

Большой вклад в теорию и практику исследований циклического характера экономических процессов внесли Н.Д.Кондратьев, С.М.Меньшиков, А.И.Анчишкин, С.П.Аукуционек, Ю.В.Яковец, А.Н.Цигичко, Л.М.Григорьев, И.М.Абрамов, Л.Клименко и экономисты ИЭиОПП СО РАН: Ю.А.Чижов, Е.М.Левицкий, П.Н.Тесля, А.П.Ермилов, В.В.Крупчатникова, Г.Д.Ковалева и др.

Среди советских ученых, принимавших участие в развитии математического аппарата и его применении в исследовании и прогнозировании временных рядов, важные научные результаты получили А.Н.Колмогоров, А.Я.Хинчин, И.Г.Журбенко, И.А.Ибрагимова, Ю.А.Рязанов, Е.М.Четыркин, Ю.П.Лукашин, Н.Е.Кобринский, В.И.Кузьмин, Л.А.Клименко, А.А.Френкель, М.М.Юзбашев и др.

В заключение можно сделать следующие выводы. Экономические процессы развиваются в большинстве своем неравномерно по объективным причинам. Это и воздействие научно-технического прогресса, ограничения развивающихся систем, природные и демографические циклы. Неравномерность развития под воздействием вероятностного комплекса причин проявляется в закономерном циклическом движении всей системы. Структура экономических процессов отражает циклические колебания различной длительности, налагаемые на основную тенденцию развития – тренд.

Лекция 2. Теоретические модели оценки циклической динамики

Первый опыт исследования циклических изменений в динамике экономических процессов был осуществлен в Национальном бюро экономических исследований США. Там был разработан метод подсчета поворотных точек в динамике процесса и выявления их сдвигов. На основе этого метода были выделены индикаторы, по динамике которых можно зафиксировать приближение кризиса, показатели, которые являются свидетельством кризиса и лаговые показатели, спад в которых запаздывает на некоторое время.

Показатели лидеры (опережающие):

- курс акций;
- вложения в НИОКР;
- сальдо платежного баланса.

Синхронные показатели:

- ВВП;
- объем розничной торговли;
- индекс промышленного производства;

Лаговые (запаздывающие):

- уровень запасов;
- объем инвестиций в обрабатывающую промышленность;
- безработица.

Первые работы по созданию моделей циклической динамики появились после кризиса 1929-1933 гг. Математическими моделями развивающихся во времени явлений ста-

новятся случайные процессы. А объектом статистического анализа являются конечные реализации случайных процессов, называемые временными рядами. Цель такого моделирования – исследование структуры процессов, построение прогноза для принятия управленческих решений. Все модели, которые позволяли исследовать экономический цикл, можно разделить на 3 вида:

1. Теоретические (аналитически разрешимые);
2. Теоретико-имитационные;
3. Эконометрические.

1. Теоретические модели экономического цикла .

1.1. Паутинообразная модель спроса и предложения: $D(P_t) = S(P_{t-1})$, где D - функция спроса, S - предложения, P - цена.

В случае линейной зависимости модель имеет вид: $\alpha + aP_t = \beta + bP_{t-1}$. Состояние равновесия достигается при $P_t = P'$, а для отклонения $p_t = P_t - P'$ цены от состояния равновесия будет справедлива зависимость $p_t = (b - a) / p_{t-1}$. Решение полученного разностного уравнения первого порядка представляет знакопередающую последовательность отклонений. Если $b \geq -a$, то ряд цен бесконечно возрастает по абсолютной величине, если $b = -a$, то разброс цены относительно положения равновесия будет постоянным. При $b < -a$ колебания затухают, и цена стремится к положению равновесия. Размах отклонений зависит от величины P_0 в начальный момент времени. Период и амплитуда колебаний определяется соотношением структурных параметров. Рассмотренная модель описывает весьма упрощенный механизм взаимодействия спроса и предложения, но, тем не менее, она демонстрирует потенциальную возможность возникновения циклической неравномерности их развития. Более сложные теоретические модели цикла, объясняющие механизм колебаний спроса, а также спроса и предложения приведены в работах С.М.Меньшикова [1974, 1979].

1.2.1. Конечно-разностные уравнения. Аналитическое представление цикла в случае дискретной модели приводит к необходимости решения конечно-разностного уравнения с постоянными коэффициентами a_0, a_1, \dots, a_n , и $a_n \neq 0$, которое в общем виде выглядит следующим образом: $a_0 Y_t + a_1 Y_{t-1} + \dots + a_n Y_0 = f(t)$. Решение дискретного уравнения получается суммированием частного решения (определяет уровень равновесия) и общего решения однородного уравнения. В случае наличия комплексных корней характеристического уравнения среди решений однородного уравнения будут периодические функции, описывающие колебательные процессы $A r^t \cos(Qt - \varepsilon)$, где A, ε - произвольные постоянные, а Q, r выражаются через коэффициенты исходного уравнения.

Таким образом, дискретные модели при определенном соотношении параметров представляют механизм возникновения циклических колебаний, наложенных на некоторый уровень равновесия. В зависимости от того, больше, равны, или меньше 1 по модулю корни характеристического уравнения, решение исходного уравнения может бесконечно возрастать, или приближаться к тенденции равновесия.

1.2.2. Дифференциальные уравнения. При создании модели иногда исходят из того, что экономические процессы развиваются непрерывно. В этом случае задача сводится к решению дифференциального уравнения вида: $a_0 \frac{d^n Y}{dt} + a_1 \frac{d^{n-1} Y}{dt} + \dots + a_n \frac{dY}{dt} = f(t)$, где n - порядок уравнения. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид: $Y = e^{\alpha t}$. Если среди корней однородного уравнения получены комплексные корни, то сопряженной паре комплексных корней соответствует решение вида: $A e^{kt} \cos(\omega t - \varepsilon)$,

генерирующее колебания, нанизанные на уровень равновесия Y' . При $k \geq 0$ колебания носят взрывной характер, в противном случае – затухающий.

Меняя параметры уравнения в соответствии с той или иной гипотезой, исследователь получает оценки циклической динамики эндогенной переменной. Непрерывная модель, сводимая к дифференциальному уравнению, дает более подробную картину влияния модельной структуры параметров на циклическое развитие, чем конечно-разностное уравнение. Но проверить решение непрерывной модели на реальных данных все равно можно только при ограниченном количестве значений t , так как в реальности доступны лишь дискретные данные. Обе разновидности теоретических моделей предполагают детерминированный характер экономических процессов и их связей, что является слишком жестким ограничением, позволяющим лишь в общих чертах воспроизводить реальный ход развития.

Теоретические модели воспроизводят механизм генерирования циклов, но длительность циклов и их влияние на динамику процесса зависят от структуры модели и ее параметров, а тем самым от квалификации автора модели, степени ее соответствия взятой за основу теории и, в конечном счете, от правильности самой теории.

1.3. Многомерные имитационные модели позволяют учитывать более сложные системы связей и увеличивать размерность моделей, что стало возможным с появлением ЭВМ. Так на построенной в ИЭиОПП СО РАН имитационной модели П.Н.Тесле удалось получить ряд важных выводов о влиянии на динамику цикла объемов инвестиций запаздывания таких процессов, как норма капиталовложений, цена рабочей силы, срок службы средств труда и т. д. Им было получено, что наибольшее влияние на длительность цикла оказывала динамика цены рабочей силы. В предположении неизменных темпов технического прогресса на этой теоретической модели автором были сгенерированы колебания длительностью 40 лет, 15 лет и 8 лет.

Притом, что такие модели позволяют существенно расширить эксперимент и более приблизить его к реальности, они также моделируют циклические процессы, адекватно реальности лишь в той мере, в которой адекватна ей структура построенной системы взаимосвязей в модели.

1.4. Эконометрические модели. В основу положен вероятностный подход. Структурными элементами эконометрической модели являются регрессионные уравнения и замыкающие систему балансовые соотношения. Модель позволяет оценить, насколько точно она воспроизводит движение эндогенных переменных на расчетном периоде и является ли это результатом внутреннего взаимодействия элементов системы, или порождается влиянием экзогенных факторов. Эконометрическая линейная многофакторная модель может быть представлена в матричной форме: $Y = AY' + BY'' + CX + U$, где $Y = (y_{it})$ - матрица эндогенных переменных; $t = 1 \dots T$. $i = 1, \dots, N$;

$Y' = (y_{jt})$ - матрица синхронных эндогенных переменных; $j = 1, \dots, N, i \neq j$;

$Y'' = (y_{i\alpha})$ – матрица лаговых эндогенных переменных;

$X = (x_{kt})$ – матрица экзогенных переменных, $k = 1 \dots, \mathcal{G}$;

U – матрица случайных отклонений, A, B, C – матрицы регрессионных оцененных коэффициентов.

Линейная эконометрическая модель генерирует колебания благодаря системе отрицательных связей и запаздываний, определяющих циклические свойства модели. Решение системы конечно-разностных уравнений позволяет оценить колебания.

Е.М. Левицким была разработана межотраслевая эконометрическая модель МДМ США -1972 большой размерности, решение которой было получено аналитическим путем. Модель включала показатели валовых выпусков 22 отраслей, накопления основных фондов в разбивке на капитал в оборудовании, зданиях и сооружениях, запасы товаров дли-

тельного пользования у населения и другие показатели. Было получено 5 пар комплексно-сопряженных корней, отражающих колебания с периодами 61,5 лет, 18 лет, 9,9 года, 6,6 лет, 4,7 года. Но решение систем конечно-разностных уравнений такой размерности сопряжено с большими трудностями, часто не удается из-за большой размерности выразить решение через параметры модели. Выход состоит в применении алгоритма Гаусса-Зейделя, позволяющего для каждого момента времени получить приближенное решение системы итерационным способом с задаваемой точностью. В этом случае для исследования циклической динамики процессов, воспроизводимых моделью, рассчитываются мультипликаторы [Чижов Ю.А., 1984, с 94]. Под импульсным мультипликатором понимается изменение эндогенной переменной при единичном изменении экзогенной переменной. Распределенный мультипликатор позволял получать значения эндогенных переменных и в последующие моменты времени. Он позволял получать период колебаний, коэффициент затухания колебаний, значение импульсного мультипликатора и запаздывание первого экстремума распределенного мультипликатора по отношению к начальному импульсу в единицах времени. Так, анализ динамических свойств эконометрических моделей экономики США показал, что рост эндогенных показателей сочетается с колебаниями продолжительностью 4-5 лет и 8-10 лет. Эксперименты на модели показали, что цикл длительностью 4.5 года связан с движением товарных запасов, а циклы средней продолжительности с динамикой основного капитала [Чижов Ю.А., 1984]. Кроме запаздываний, генерируемых моделью, колебания в модели могут привноситься в систему экзогенными показателями. Источниками колебаний могут стать также остатки регрессионных уравнений, входящих в эконометрическую модель, в которых вполне возможны влияния неучтенных факторов, имеющих циклический характер. Кроме того, мультипликация случайных отклонений уравнений системы может привести к возникновению колебаний в моделируемых показателях и необходимо отличать такого рода колебания от внутренне присущих системе.

Метод расчета мультипликаторов для оценки циклической динамики эндогенных показателей остается достаточно грубым, он не позволяет в одном процессе одновременно наличие нескольких близких периодических компонент. Кроме того, он не предназначен для исследования экзогенных факторов и случайных остатков.

Заключение. Ни один из предложенных методов не решает проблемы прямого измерения циклических процессов, представленных фактическими данными. Во всех случаях при разработке моделей предварительно создавался некий аналог механизма, воспроизводящий в той или иной степени реальный закон развития, и лишь затем исследовались циклические свойства решений. Для эконометрических моделей на этапе построения регрессионных уравнений выбираются регрессоры, исходя из взятой за основу теории и результатов большого объема вычислений с подбором нужных связей и оценкой лагов. Элемент субъективизма в данных типах моделей значительно ниже, чем в предыдущих моделях, но он все же остается. Кроме того, эконометрическая модель не располагает средствами оценки циклического характера экзогенных факторов и регрессионных остатков (длительностью 2 и более наблюдений), что снижает ее прогнозные возможности.

Лекция 3. Временной ряд. Стационарность. Тренд. Параметрические и непараметрические способы оценивания тренда

Временной ряд – это множество наблюдений, выбранных последовательно, для которых в отличие от остальных разновидностей данных, важен порядок. Под временным рядом понимаем выборочную реализацию вероятностного процесса, который однозначно определяется семейством конечномерных распределений:

$$F_x(t_1, t_2, \dots, t_k, x_1, x_2, \dots, x_k) = P(X_{t_1} < x_1, \dots, X_{t_k} < x_k)$$

Стационарным случайным процессом называют процесс, если все его характеристики постоянны при всех значениях $k, t_1, \dots, t_2, x_1, \dots, x_k$. Это свойство однородности. **Стационарным в узком смысле** называется процесс, если его функция распределения не зависит от времени:

$$F_X(t_1 + h, \dots, t_k + h, x_1, \dots, x_k) = F_X(t_1, \dots, t_k, x_1, \dots, x_k).$$

Стационарным в широком смысле называется процесс, если постоянны первый и второй моменты, а функция ковариации зависит только от лагового сдвига m и не зависит от времени:

$$1). \mu_t = \mu = const;$$

$$2). D_t = \delta^2 = const;$$

$$3). Cov(t + m) = cov(m)$$

$$\text{где } cov_X(t + m, t) = \mu(X_{t+m} - \mu)(X_t - \mu).$$

Класс стационарных в широком смысле процессов включает стационарные процессы в узком смысле.

Экономические процессы случайны и, как правило, нестационарны. Для них характерна тенденция роста(1) или снижения (2) (тренд среднего), увеличения (3) (снижения) размахов колебаний (тренд дисперсии), или то и другое(4). Часто можно столкнуться со сменой уровня в динамике показателя (5).

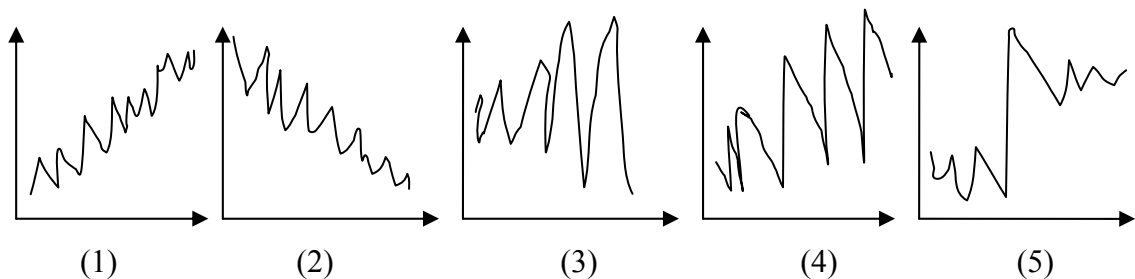


Рис.1 Примеры нестационарных процессов.

Представляем процесс как сумму трех моделей:

$X(t) = \mu(t) + S(t) + Y(t)$, где $\mu(t)$ - модель тренда, $S(t)$ - сезонная составляющая, $Y(t)$ - стационарный остаток. Такое разложение ряда носит теоретический характер и имеет право на применение, как и любое другое обоснованное представление ряда.

Чтобы построить такую модель нужно оценить тренд (линейный или нелинейный), нелинейную однопериодную сезонную компоненту и построить модель стационарного остатка.

Определение. Под трендом среднего понимаем неслучайную непериодическую функцию $\mu(t)$, описывающую в модели процесса долгосрочную тенденцию (рост, падение).

Еще в начале 90-х годов прошлого столетия при моделировании отдельного процесса было принято строить модели более простого типа: $X(t) = \mu(t) + \varepsilon$, где ε - белый гауссовский шум, т. е. его математическое ожидание равно 0, дисперсия постоянна и $COV(Y_{t+m}, Y_t) = 0$. При этом при проверке последнего условия обходились значениями коэффициента Дарбина-Уотсона, а он позволял судить об отсутствии связи только в соседних точках (для $m=1$). Такие модели зачастую страдали низкой точностью и не позволяли исследовать структуру процесса, а, следовательно, и не могли быть инструментом для предположений о причинах, формирующих сложную динамику процесса.

С развитием теории и вычислительной техники при моделировании экономических рядов изменился смысл оценки тренда: ранее ставилась задача с помощью модели тренда описать максимальную долю изменений процесса (максимизировать долю объясненной дисперсии). Конечно, полиномы степени n не строились, так как это означало бы полное

воспроизведение динамики случайного процесса – а это полный абсурд, но все же зачастую степень полинома выбиралась достаточно высокая, и уже после третьей степени не поддавалась никакой практической интерпретации, что лишало полученное решение смысла.

Развитие теории временных рядов для стационарных в широком смысле процессов изменило задачу оценки тренда: стало возможным строить модель тренда, которая минимально фильтрует процесс и обеспечивает выполнение условия стационарности остатков в широком смысле. Удаление такого тренда позволяет оценить динамику компоненты, дополняющей тренд и получить не только обоснованные решения, но и возможность выстроить гипотезы о причинном характере изменений в динамике изучаемого процесса.

Для стационарных рядов задача построения тренда не возникает. Для нестационарных процессов она сводится к построению фильтра, минимально искажающего динамику ряда и дающего на выходе стационарный остаток, в динамике которого сохраняются почти все зависимости в данных. Для прогнозирования предпочтительнее оценка параметрического тренда. Следует различать нестационарность среднего и нестационарность, проявляющуюся в дисперсии.

От нестационарности в дисперсии позволяет избавиться переход к логарифмам, или абсолютным приростам.

Способы оценки тренда среднего достаточно разнообразны, они фильтруют ряд в различных частотных интервалах и их можно разделить на параметрические и непараметрические.

1. Параметрические способы оценки тренда среднего.

$$X(t) = a + bt$$

$$X(t) = e^{a+bt}$$

$$X(t) = 1/(a + bt)$$

Все три модели рассчитываются с помощью линейной регрессии. Во втором уравнении строится регрессия для $\ln X(t)$, в третьем для $1/X(t)$.

Теоретически можно представить процесс как сумму полиномиального тренда и некоей стационарной функции от t и оценивать тренд среднего в виде полиномиальной регрессии вида: $\mu(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_p t^p$ и $X(t) = \mu(t) + Y(t)$. Возникает вопрос, как определить порядок полиномиальной регрессии? Существует ли максимальное $p < n$, где n – число наблюдений ряда, после которого увеличение степени полинома бессмысленно? Да, существует. В статистическом пакете «Эвриста» реализован подход для определения максимально возможного порядка аппроксимирующего полинома. В меню «Метод переменных разностей» последовательно вычисляются разности $X(t) - X(t-1)$ порядка p от 1 до 9, вычисляются суммы их квадратов и они нормируются. Значение p , после которого эти суммы стабилизируются, считается максимальным порядком полинома, аппроксимирующего наилучшим способом ряд $X(t)$.

Если получен максимальный порядок полинома p , то для абсолютных приростов – ряда первых разностей, наилучшим аппроксимирующим полиномом будет полином степени $p-1$, для ряда вторых разностей – полином степени $p-2$. Оператор разности понижает степень наилучшего аппроксимирующего полинома на 1. Мы можем не выделять отдельно в модели сезонную компоненту. Но если такая необходимость есть, то строим модель вида:

$X(t) = \mu(t) + S(t) + Y(t)$ или $X(t) = \mu(t)S(t)Y(t)$, где второе представление сводится к линейному виду логарифмированием. На рис 2 приведены примеры полиномов первого, второго и третьего порядков. Количество точек смены тенденции (перегиба) на единицу меньше степени полинома.

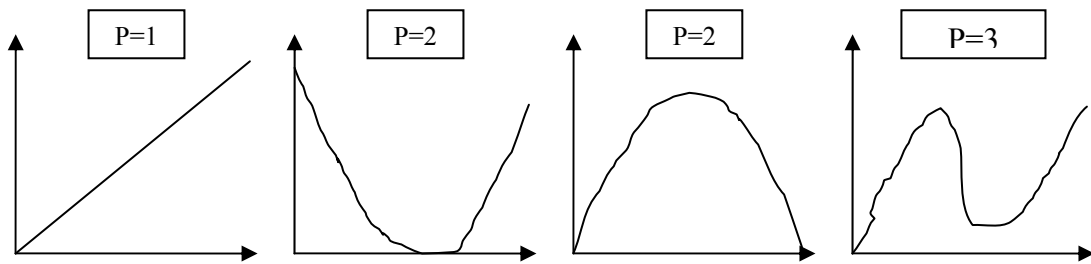


Рис. 2 Примеры различных полиномиальных трендов.

Таким образом, оператор разности фильтрует одну точку перегиба.

Для оценки сезонной компоненты можно использовать тригонометрический полином в случае строго периодической $S(t)$, либо применить фильтр сезонной разности, который позволит без аналитического представления избавиться от сезонности:

$$\nabla_s(t) = X(t) - X(t-s).$$

Непараметрические методы оценивания тренда.

Разностный оператор.

Разностный оператор позволяет отфильтровать из $X(t)$ одновременно и $\mu(t)$ и $S(t)$:

$Y(t) = \nabla^k \nabla_s^l X(t)$, где ∇ - разностный оператор; $X(t)$ – исходный ряд; k – порядок несезонных разностей; l – порядок сезонных разностей; s – период сезонности.

При этом: $\nabla X(t) = X_t - X_{t-1}$; $\nabla_{x(t)}^k = \nabla(\nabla_{x(t)}^{k-1})$; $\nabla_s(X(t)) = X_t - X_{t-s}$;

$\nabla_s^l(X_t) = \nabla_s(\nabla_s^{l-1} X_t)$; $Y(t)$ – стационарный случайный процесс.

Максимальный порядок разностей, как и степень полинома определяется по методу переменных разностей в блоке «Эвристики» «Анализ трендов».

Таким образом, удаление сезонной компоненты возможно 2 путями. Первое – оценить $S(t)$ и вычесть ее из ряда $X(t)$. Второе – взять сезонный разностный оператор порядка S .

Простое скользящее среднее. Обозначим через m порядок простого скользящего среднего. Должны выполняться условия:

- $m \ll n$; m – длина скользящей средней; n – число наблюдений ряда;
- $\sum a_i = 1$;
- a_i симметричны относительно центрального весового значения.

Если m нечетно, то $Y_{t-1+\frac{m+1}{2}} = \sum_{i=1}^m a_i X_{t+i}$; $a_i = \frac{1}{m}$.

Если $m = 2k$, то $a_1 = a_{2k+1} = \frac{1}{4k}$, $a_i = \frac{1}{2k}$ для остальных i . Оценка в этом случае рассчитывается по $2k+1$ точке и результат присваивается $Y_{t-1+\frac{2k+1}{2}}$.

Если ряд содержит колебания с периодом m , то скользящая средняя с периодом m подавит эти колебания и значительно ослабит роль всех колебаний с периодами, меньшими m . Практически она сгладит все колебания с периодом m и менее.

Полиномиальное скользящее среднее длиной $m=2k+1$.

Строится полином порядка p на фрагменте данных длиной m . Порядок полинома p и длина выборки m задается, исходя из потребности задачи. В качестве Y_{t+k+1} выбирается свободный коэффициент построенного регрессионного уравнения, который и присваивается центральному значению интервала. С повышением степени p при фиксированном m в остатках снижается роль коротких колебаний, так как чем выше p , тем более короткие колебания описываются полиномом. При этом в тренде роль таких колебаний возрастает. Т.о., если применять простое сглаживание порядка m , то в тренде сохранятся зависимости в данных длительностью $>m$, а в остатках $\leq m$. Если применяется полиномиальное сглаживание, то увеличить присутствие флуктуаций в тренде можно за счет роста p . Увеличение m дает обратный эффект.

Сглаживание Спенсера.

Это скользящее среднее для $m=21$ или $m=15$ с конкретными весовыми коэффициентами a_i , подобранными автором. Такое сглаживание сопоставимо со сглаживанием полиномиальным средним со степенью полинома, равной 2 или 3.

В данном курсе для анализа и моделирования временных рядов будет использован специализированный пакет прикладных программ «Эвриста», разработанный в центре СП Диалог в МГУ. Главное меню пакета включает 14 окон:

Таблица 2.

Главное меню. Меню блока Анализ тренда

Экспорт/импорт	
Моделирование данных	
Предварительный анализ	
Анализ тренда	Простое скользящее среднее; Полиномиальное скользящее среднее; Формулы Спенсера; Простая регрессия; Полиномиальная регрессия; Сезонная регрессия; Удаление тренда; Выделение тренда; Переменные разности (оценка максимального порядка полинома).
Прогнозирование	
Непараметрический спектр	
Параметрический анализ	
Кепстральный анализ	
Кросс-анализ	
Анализ интервенций	
Фильтрация	
Регрессионные модели	
Анализ фазового пространства	
Гармонические модели	
Меню пользователя	

Немного о пакете. Данные в пакете имеют эксклюзивное представление и для связи с другими пакетами предусмотрены процедуры экспорта и импорта, обеспечивающие преобразование в обе стороны в формат ASCII, Dbase, SYSTAT.

В пункте *Моделирование данных* (рис. 3) предусмотрена возможность построить различные искусственные ряды, в том числе чисто случайный процесс - белый шум.



Рис.3

В программном комплексе «Эвриста» в главном меню «Анализ тренда» реализованы программы, перечисленные в правом окне. Все приведенные **непараметрические** способы построения тренда сокращают длину ряда данных, что для экономических задач часто приводит к затруднениям дальнейшего оценивания.

Возникает вопрос, как искажается циклическая динамика данных, полученных после удаления тренда? Что сохраняется в остатках и что воспроизводится трендом?

Для этого рассмотрим ось частот, для которых будем получать оценку их влияния на дисперсию исследуемого ряда в виде значений функции спектральной плотности.

Частота меняется от 0 до 0.5. Условимся, что оценки влияния низкочастотных процессов (медленные колебания) находятся в первой четверти от начала координат, колебаний со средними частотами занимают примерно вторую и третью четверть частотной оси, и оценки коротковолновых тенденций заполняют последнюю четверть интервала [0,0.5].

Применение фильтра первых разностей (переход к приростам) воздействует на 6 частотных интервалов в окрестности 0 (нулевой частоты или бесконечного периода). Он не только убирает линейный тренд среднего (период бесконечен, частота нулевая), но и значительно занижает, если не убирает полностью длинноволновые компоненты из динамики исходного ряда.

Переход к приростам позволяет усилить оценки функции спектра в средних и быстрых частотах.

Переход к ускорению – вторая разность сглаживает спектр в низких частотах и в левой части среднего диапазона, усиливая его оценки в остальных частотах – т.е. более четко высвечивает картину в быстрых частотах.

Скользящее среднее работает со стороны быстрых частот. Искажение оценок происходит в диапазоне от частоты $1/m$ до частоты 0.5. С увеличением порядка скользящей средней искажение распространяется вправо в сторону низких частот.

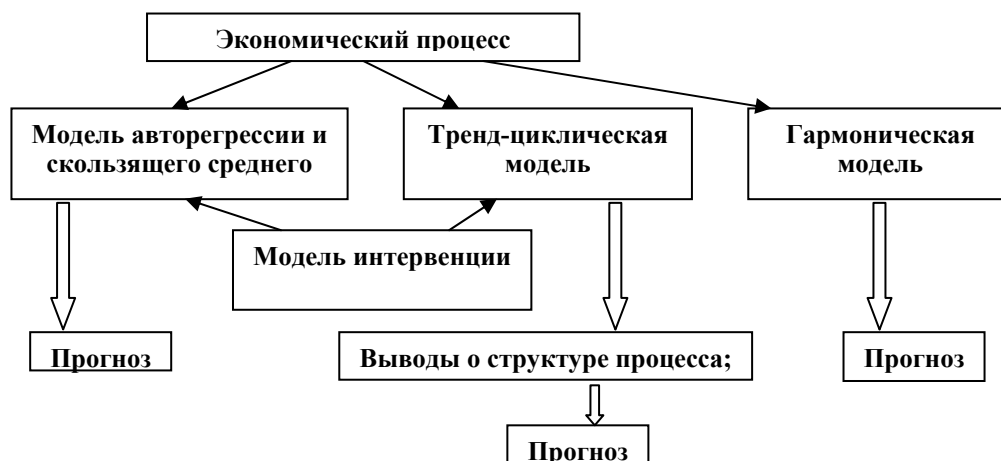
Если после сглаживания вычесть полученный ряд (тренд) из исходных данных, то в остатках останется та динамика, которую мы сглаживали.

Применение полиномиального тренда самый щадящий способ избавления от тренда среднего. Наилучшая ситуация, когда тренд имеет линейное представление. Тогда в остатках от тренда сохраняется вся информация о флуктуациях. Если полином второй степени, то мы постулируем развитие ряда по параболе и вносим одну точку перегиба. Чем выше степень полинома, тем больше искажение в остатках. Но оно несопоставимо меньше, чем при применении разностей.

Лекция 4. Модели авторегрессии и скользящего среднего и их модификации

Если исходный ряд стационарен в широком смысле, то можно сразу приступать к его моделированию. Если условие стационарности не выполнено, то требуется предварительная работа, связанная с удалением тенденции среднего, а иногда и дисперсии.

В данном курсе будут рассмотрены три основных подхода к моделированию экономических процессов, представленных единственной конечной реализацией, упорядоченной во времени:



1. Модели авторегрессии и скользящего среднего. В общем виде они имеют вид:

$$Y(t_i) = \varphi_1 Y(t_{i-1}) + \dots + \varphi_p Y(t_{i-p}) + \theta_0 \varepsilon(t_i) - \theta_1 \varepsilon(t_{i-1}) - \dots - \theta_\gamma \varepsilon(t_{i-\gamma}), \text{ где } \varepsilon(t_i), \quad i=1, \dots, n -$$

гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием и постоянной дисперсией. $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p, \theta_1, \dots, \theta_\gamma$ - неизвестные коэффициенты. Если $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ равны 0, то модель называется моделью скользящего среднего порядка γ . Если $\theta_1, \dots, \theta_\gamma = 0$, то модель является моделью авторегрессии порядка p . Неизвестными величинами при построении такого уравнения являются коэффициенты модели, степень авторегрессии p , степень скользящего среднего γ и дисперсия белого шума.

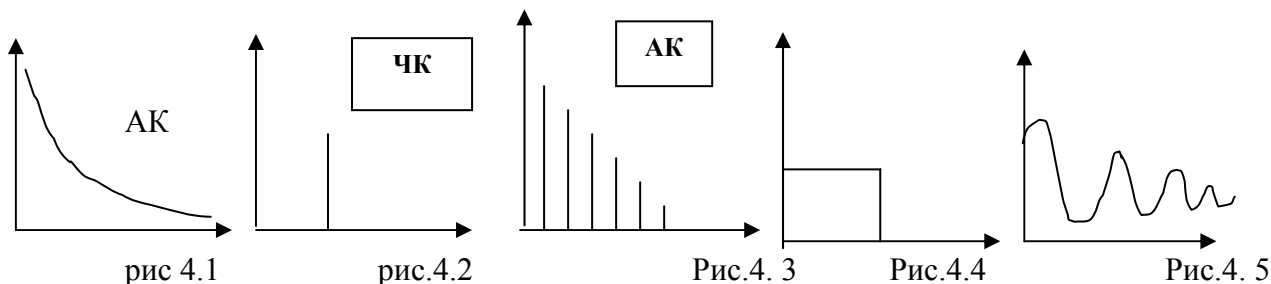
Обозначим B - оператор сдвига на 1 шаг: $BY(i) = Y(i-1)$, тогда модель можно записать в компактном виде: $\varphi(B)Y(i) = \theta_0 + \theta(B)\varepsilon(i)$, где $\varphi(B) = 1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_p B^p$, $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_\gamma B^\gamma$. Полиномы называются соответственно характеристическими полиномами авторегрессии и скользящего среднего.

Если $Y(t_i)$ – процесс авторегрессии, то условие стационарности состоит в том, что корни характеристического полинома лежат вне единичного круга на комплексной плоскости. Процесс скользящего среднего стационарен при любых значениях коэффициентов.

Условие стационарности смешанного процесса совпадает с требованием расположения корней характеристического полинома вне единичного круга.

Возникает задача определения порядка p и γ . Для этого рассчитываются значения функции автокорреляции и частной автокорреляции. Формула расчета коэффициента частной автокорреляции для $p=3$: $\rho_{1,2*3} = (\rho_{1,2} - \rho_{1,3}\rho_{2,3}) / ((1 - \rho_{1,3}^2)(1 - \rho_{2,3}^2))^{1/2}$.

Если функция автокорреляции медленно снижается, а функция частной автокорреляции имеет большое значение на задержке 1 (рис. 4.1 и 4.2), то исходный ряд нестационарен, и требуется либо удалить полиномиальный тренд, либо применить оператор разности первого порядка.



2. Если функция $AK = 0$ всюду, кроме задержек $S, 2S, 3S, \dots$ и очень медленно убывает (рис 4.3), то мы имеем сезонную компоненту в динамике ряда и можем ее отфильтровать с помощью сезонной разности порядка S .

3. Если частная автокорреляция $ЧК = 0$ на задержках, больших p (рис 4.4), а функция автокорреляции либо убывает с экспоненциальной скоростью (рис. 4.1), либо убывает по синусоиде (рис.4.5), то для аппроксимации ряда подходит авторегрессионная модель $AR(p)$.

4. Если частная автокорреляция $ЧК = 0$ всюду, кроме задержек $S, 2S, 3S, \dots, Sp$, то для представления процесса нужна сезонная авторегрессия порядка p

5. Если автокорреляционная функция $AK = 0$ после порядка γ (рис. 4.4), а частная автокорреляционная функция ведет себя как затухающая синусоида (рис.4.5) или экспонента (рис.4.1), то для процесса более всего подходит модель скользящего среднего порядка γ : $CC(\gamma)$.

6. Если $AK = 0$ везде кроме $S, 2S, 3S, \dots, S\gamma$, то подходит модель сезонного скользящего среднего порядка γ .

7. Если функция автокорреляции постоянна до задержки $\gamma - p$ и далее снижается плавно до 0, или флуктуирует до 0, а функция частной корреляции...снижается начиная с первой задержки, то $\gamma - p > 0$, и подходит смешанная модель $ARCC(p, \gamma)$.

8. Если функция частной автокорреляции постоянна до задержки $p - \gamma$ и далее снижается плавно до 0, или флуктуирует до 0, а функция автокорреляции снижается начиная с первой задержки, то $\gamma - p < 0$, и подходит смешанная модель $ARCC(p, \gamma)$. В Эвристе для построения $ARCC$ моделей выделен блок программ под названием «Параметрический анализ». Он содержит полный комплекс необходимых модулей для построения моделей авторегрессии, скользящего среднего и смешанных моделей.

1. Идентификация модели (рис. 5). Выдаются функции автокорреляции и частной корреляции.

2. Критерий AR -порядка. Рассчитывается наилучший порядок AR модели по 4 критериям:

Парзен;

Информационный критерий Акайке;

Критерий среднего Акайке;

Хеннан-Куинн.

По умолчанию для определения порядка модели выбирается критерий Парзена.

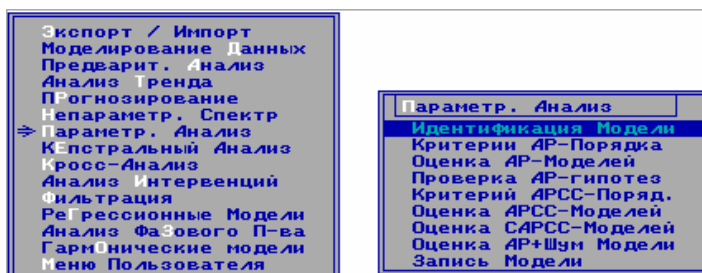


Рис 5. содержание меню в блоке Параметрический анализ

3. Для оценки модели предлагается на выбор методы оценки коэффициентов :
МНК, Левинсона-Дербина, Берга, Псевдо-наименьших квадратов. По умолчанию выбирается МНК.

При идентификации модели оценивается на выбор: спектральная плотность (частотная или периодическая шкала); Автокорреляционная функция, AR -параметры;

Порядок модели можно подобрать отдельно в меню «Критерий АР-порядка» и задать его при построении модели. Но можно рассчитать модель с автоматическим подбором порядка.

Спектральная плотность оценивается на основании коэффициентов подобранной модели по формуле:

$$P(f_i) = 2\delta_\varepsilon^2 \frac{|1 - \theta_1 e^{-i2\pi f_i} - \dots - \theta_p e^{-i2\pi f_i}|^2}{|1 - \varphi_1 e^{-i2\pi f_i} - \dots - \varphi_p e^{-i2\pi f_i}|^2}$$

и спектр отражает структуру процесса ровно настолько, насколько точно описала ее построенная модель.

Аналогично выбирается порядок авторегрессии и скользящего среднего для моделей АРСС в меню «Критерий АРСС – порядок». После построения модели ее следует записать, используя программу «Запись модели». Затем в блоке Прогнозирование выбирается программа для прогнозирования нужной модели и строится прогноз по сохраненной модели.

Как показывает опыт, модели авторегрессии и скользящего среднего очень чувствительны к малейшим нарушениям условий стационарности даже в широком смысле и на практике часто не дают результатов. Кроме того, прогнозы, построенные по таким моделям, имеют затухающую тенденцию. На практике, иногда необходимо убедиться в правильности оцененной структуры в тренд-циклической модели и тогда полезно построить параметрическую модель и сравнить спектры. Были случаи, когда из 3 типов моделей, параметрическая АРСС модель позволяла получить лучший прогноз.

Лекция 5. Непараметрические оценки спектра

1. Временной ряд – наблюдения случайного процесса, упорядоченные во времени.
2. Разложение временного ряда (декомпозиция) во временной области представляет сумму некоторых функций от времени и случайного остатка.
3. Разложение ряда в частотной области.

Рассмотрим детерминированный колебательный процесс.

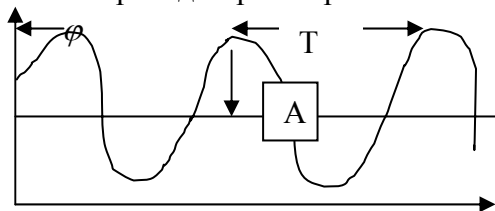


Рис. 6

Определения (рис.6).

Период – время, за которое процесс повторяет свои значения: $Y_t = Y_{t+kT}$, $k = 1, 2, \dots$

Величина, обратная периоду, называется частотой: $f = \frac{1}{T}$ – число повторений

цикла в единицу времени. Например, $Y_t = k$, где $k=0, 1, 2, \dots, \infty$ - этот ряд имеет бесконечный период.

Амплитуда – отклонение от среднего значения ряда до максимума или минимума.

Фаза – расстояние от начала отсчета времени до ближайшего максимума.

Если ряд флуктуирует относительно возрастающего или убывающего среднего значения, то говорим, что ряд имеет тренд среднего.

Если амплитуда ряда возрастает или убывает, то говорим, что ряд имеет тренд дисперсии.

Если ряд не имеет тренда среднего и дисперсии, то он с высокой вероятностью удовлетворяет определению «стационарного в широком смысле».

Примером стационарного в широком смысле периодического временного ряда служит детерминированная косинусоида: $Y_t = \mu + A \cos 2\pi f(t - \varphi)$.

Обозначим $\varpi = 2\pi f$, получаем $Y_t = \mu + \alpha \cos(\varpi t - \theta)$, или раскрыв косинус разности и введя обозначения $\alpha = A \cos \theta, \beta = A \sin \theta$, получаем аналог: $Y_t = \mu + \alpha \cos \varpi t + \beta \sin \varpi t$, где $A^2 = \alpha^2 + \beta^2$ и $\theta = \text{arctg} \frac{\beta}{\alpha}$.

Временной ряд можно представить как сумму бесконечного числа периодических рядов:

$$(*) Y_t = \mu + \sum_i^{\infty} A_i \cos(\varpi_i t - \theta_i) \quad 0 \leq \varpi_i \leq 2\pi, \text{ или бесконечной суммой синусов и коси-}$$

нусов – рядом Фурье. Реальный временной ряд имеет конечную длину N , и мы не можем по его данным оценить бесконечное количество параметров A_i и θ_i . Если интервал между данными год, квартал, неделя, день и т. д., то самая медленная (самый большой период) синусоида имеет период $T=N$, а самая медленная частота $f=1/N$, или соответствующая угловая частота $\varpi = \frac{2\pi}{N}$.

Наименьший период, который мы в реальности можем наблюдать – 2 наблюдения (год, месяц, и т. д.) и, соответственно, самую быструю частоту – $f=1/2$, т. е. $\varpi = \pi$ - частоту Нейквиста.

Для любого конечного ряда представление $(*)$ можно записать в виде: $Y_t = \mu + \sum_{i=1}^n A_i \cos(\varpi_i t - \theta_i)$, где $n=N/2$ с параметрами, которые следует оценить: μ, A_i, θ_i .

Если обозначить $\theta_0 = 0, \varpi_0 = 0$, то можно записать: $Y_t = \sum_{i=0}^n A_i \cos(\varpi_i t - \theta_i)$ или

$$Y_t = \mu + \sum_{i=0}^n \alpha_i \cos \varpi_i t + \sum_{i=0}^n \beta_i \sin \varpi_i t.$$

Для реального ряда можно найти выборочные оценки параметров α_i, β_i по формуле:

$$\alpha_i^{\cdot} = \begin{cases} \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N Y_t \cos \varpi_i t & \text{при } i=1, 2, \dots, n-1 \\ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N Y_t \cos \varpi_i t & \text{при } i=0, n \end{cases}$$

$$\beta_i^{\cdot} = \begin{cases} \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N Y_t \sin \varpi_i t & \text{при } i=1, 2, \dots, n-1 \\ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N Y_t \sin \varpi_i t & \text{при } i=0, n \end{cases}$$

Где $\varpi_i = 2\pi i / N$, $A_i^2 = \alpha_i^{\cdot 2} + \beta_i^{\cdot 2}$, $\theta_i^{\cdot} = \text{arctg}(\frac{\beta_i^{\cdot}}{\alpha_i^{\cdot}})$.

Первый шаг в построении спектральных оценок. Важнейшим моментом в построении спектральных оценок является доказательство того факта, что выборочную дисперсию можно представить в виде суммы оценок амплитуд для набора n частот:

$$D_Y^{\cdot} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} A_i^{\cdot 2} + A_n^{\cdot 2}.$$

Второй шаг. Выборочные оценки амплитуд можно получать на основе значений функции автоковариации, а не значений исходного ряда. Это позволяет значительно улучшить качество оценок. Рассмотрим автоковариационную функцию:

$$C_k = \frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^{N-k} (Y_t - E^{\cdot})(Y_{t+k} - E^{\cdot}), \quad \rho_k = \frac{C_k}{C_0}, \text{ где } E^{\cdot} - \text{выборочное матожидание, } C_k -$$

несмещенные оценки функции автоковариации.

Таким образом, имеем N-1 значение выборочной функции автоковариации. Но недостаток этих оценок автоковариации в том, что их надежность падает с ростом k и принято, что оценки остаются надежными при $k \leq N/5$. А.Я. Хинчин выявил связь между спектральной функцией распределения и автоковариационной функцией C_k процесса Y(t):

$$C_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega k} dF(\omega) \text{ или для действительных процессов: } C_k = 2 \int_0^{\pi} \cos(\omega k) dF(\omega)$$

Где $dF(\omega_i)$ измеряет вклад частотной полосы $(\omega_i, \omega_i \pm d\omega)$ в дисперсию процесса.

Т.к. $dF(\omega) = f(\omega)d\omega$, то $f(\omega) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} C_k \cos(k\omega) + \frac{C_0}{2\pi}$, где

$f(\omega_i)$ есть оценка мощности A_i в ω_i .

Выразим A_i через значения выборочной функции автоковариации C_k :

$$(**) \quad \frac{1}{2} A_i^2 = \frac{2}{N} \left[C_0 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} C_k \cos(\omega_i k) \right], \quad i=1,2,\dots,n-1. \text{ Поделив (**)} \text{ на } C_0, \text{ получим}$$

оценку относительной средней мощности на любой частоте как преобразование Фурье автокорреляционной функции и это деление избавит нас от единиц измерения.

Разделив (**) на $2\pi/N$, и, подставив $\omega_i = 2\pi f_i$, получаем:

$$(***) \quad p(f_i) = 2 \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} r_k \cos(2\pi f_i k) \right], \quad i=1,2,\dots,n. \text{ Таким образом, } p(f_i) \text{ представляет}$$

оценку средних мощностей A_i^2 в частотном интервале f_i . Однако, эти оценки несостоятельны – с ростом N их дисперсия не уменьшается и для больших k оценки функции ненадежны.

Чтобы повысить надежность, оставим в формуле (***) не все N-1 значений функции автокорреляции. Для этого введем точку усечения $L \ll N-1$ и будем проводить суммирование для $k=1, \dots, L-1$. Отсечение ненадежных слагаемых повышает надежность оценки спектра, но с ростом L дисперсия оценок растет (они остаются несостоятельными), а со значительным уменьшением L наблюдается их смещение. Поэтому необходимо выбирать оптимальное L, которое как показывает практика должно составлять не менее 40% от N.

Вторая проблема – несостоятельность оценок, решается за счет сглаживания оценок скользящим средним. Это достигается введением «Окон» с весами $h(\omega_i)$, такими, что

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} h(\omega) d\omega = 1. \quad \text{Например, спектральное окно Парзена:}$$

$$G(\omega) = (3/4 * k^3) \left[(4 \sin(k\omega/4)) / \omega \right]^4 \text{ и ее аналог во временной области:}$$

$$g_k = 1 - \frac{6k^2}{L^2} \left(1 - \frac{k}{L}\right) \text{ для } 0 \leq k \leq \frac{L}{2}; \text{ или } g_k = 2 - \left(1 - \frac{k}{L}\right)^3 \text{ для } \frac{L}{2} \leq k \leq L.$$

Окончателная формула для расчета функции спектральной плотности [Болч, Хуань, 1979]:

$$p(f_i) = 2 \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{L-1} g(k) r(k) \cos(2\pi f_i k) \right], \quad i=0,1,\dots,2L$$

Приведенная формула позволяет получить надежные и состоятельные оценки функции спектральной плотности для удвоенного числа частот. Это позволяет применять аппарат спектральных плотностей к достаточно коротким рядам. В частности опыт применения к коротким рядам подробно изложен в [Ковалева Г.Д., 1992].

Рассмотрим частный случай стационарного случайного процесса:

$$Y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k) e^{-i\lambda_k 2\pi t}, \quad t=0, \pm 1, \dots, \quad \text{где } \lambda_k - \text{ частота из интервала } [-0.5, 0.5], \quad \varphi_k - \text{ неза-}$$

висимые случайные величины с нулевыми средними и дисперсиями δ_k^2 . В данном случае $Y(t)$ является смесью гармонических колебаний с частотами λ_k и случайными амплитудами φ_k . При этом δ_k^2 можно трактовать как интенсивность или мощность гармонического колебания с частотой λ_k .

Если $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k^2 < \infty$, то ряд в правой части сходится в среднеквадратическом смысле и автоковариационная функция равна :

$C_Y(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k^2 e^{i\lambda_k 2\pi m}$. Введем функцию: $F(\lambda) = \sum \delta_k^2$, тогда автоковариационная функция может быть записана в виде:

$$C_Y(m) = \int_{-0.5}^{0.5} e^{i\lambda 2\pi m} dF(\lambda) \quad - \text{ это стационарное представление автоковариационной}$$

функции стационарного случайного процесса $Y(t)$. Функция $F(\lambda)$ называется спектральной функцией процесса $Y(t)$, а последовательность $\{\delta_k^2\}$ – его спектром. Спектр представляет оценку мощности каждой из гармоник, спектральная функция показывает суммарную мощность всех гармоник из частотного интервала $0 \leq \lambda_k \leq \lambda$. Из спектрального

представления автоковариационной функции следует, что $DY(t) = C_Y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k^2$, т. е. мощность процесса складывается из мощности гармонических составляющих. Спектр процесса показывает разложение дисперсии процесса (или его мощности) по частотам λ_k .

Спектральное представление автоковариационной функции справедливо для любого случайного процесса даже, если этот процесс не представим явно в виде счетной смеси гармонических колебаний со случайными амплитудами.

Произвольный стационарный процесс представим в определенном смысле в виде совокупности гармонических компонент с частотами, пробегающими весь отрезок $[-0.5, 0.5]$. Тогда значение спектральной плотности показывает вклад компоненты с частотой λ в суммарную интенсивность процесса.

В «Эвристе» функция спектральной плотности рассчитывается в меню «Непараметрический спектр». Блок содержит программы:

- Сглаженная периодограмма
- Усредненная периодограмма
- Простая периодограмма.

Простая периодограмма представляет разложение значений автоковариационной функции и является асимптотически несмещенной оценкой.

Периодограмма впервые была введена А. Шустером в 1898 г для анализа скрытых периодичностей в динамике процесса. Но тогда достаточно быстро поняли, что ее нельзя использовать для исследования циклических свойств процесса. Оценки, полученные разложением в ряд Фурье, не удовлетворяют условию состоятельности, периодограмма ведет себя нерегулярно, сильно флуктуирует, особенно для больших значений N , и может содержать ложные пики. И, хотя на основе оценок разложения в ряд Фурье нельзя принимать решения о циклических составляющих по выше названным причинам, тем не менее, их можно использовать для уточнения периодов при построении модели в отдельных ситуациях.

Сглаженная периодограмма в «Эвристе» построена на основе разложения в ряд Фурье автоковариационной функции с применением сглаживающих окон для обеспечения состоятельности оценок: $\lim D(f_N(i)) = 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Самый простой пример сглаживания оценок спектра для диапазона частот в окрестности оцениваемой частоты – осреднение оценки. Известно, что осреднение независимых слагаемых приводит к уменьшению дисперсии среднего по сравнению с дисперсией слагаемых.

В Эвристе предлагаются на выбор для сглаживания оценок следующие окна:

- Хеннинга;
- Блэкмана;
- Блэкмана –Харриса;
- Бартлета;
- Трапецевидное окно;
- Прямоугольное окно.

Ширина окна отвечает за степень сглаживания. Значение ширины окна существенно зависит от N и от оцениваемой спектральной плотности и поэтому ширину окна также оценивается по данным. Такая оценка называется адаптивной шириной окна и считается автоматически, если не сказано иное. Если спектральное ядро (весовые коэффициенты) сконцентрированы в центре, то это будет соответствовать оценке с большей дисперсией, но с меньшим смещением, При выборе более пологого спектрального окна, дисперсия будет меньше, но смещение (перелив мощности в соседние частоты) больше.

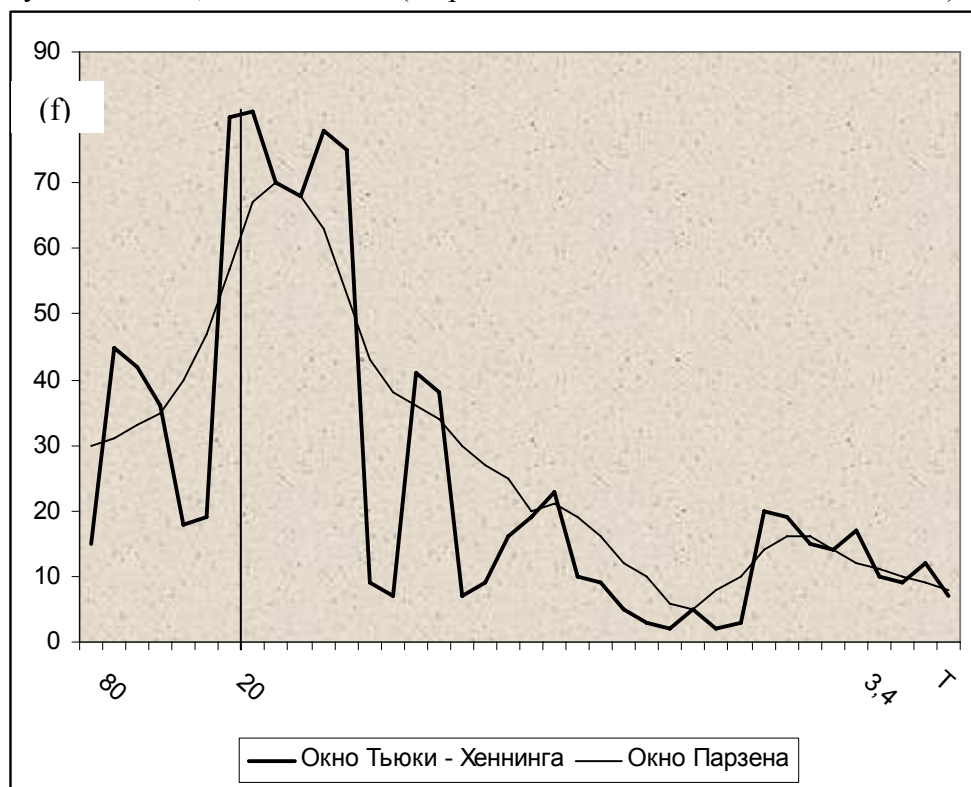


Рис. 7 Спектральные оценки ∇GNP в США для 1 кв. 1956-4 кв. 1984 гг с использованием различных окон для сглаживания оценок.

Выбор окна зависит от задачи. Так для ряда приростов GNP в США на интервале 1 квартал 1956 –IV квартал 1984 г с использованием окна Парзена нами была получена сглаженная спектральная плотность с 3 округленными пиками, из которых 2 были слабо выражены. Окна Хеннинга позволили получить функцию спектральной плотности с большим количеством пиков. В данном случае больший интерес представляли более под-

робные оценки, полученные с окном Тьюки-Хеннинга. Выбор окна требует значительной практики их применения. В практических расчетах полезно сравнить оценки при различных окнах. Это особенно важно, когда оценка спектра не подтверждается на этапе моделирования.

Выбор окна зависит от цели исследования. Для получения более надежных оценок следует использовать более широкие "окна" (например, Парзена), для получения оценок в близких частотах - более узкие "окна" (например, Тьюки-Хеннинга).

В качестве примера влияния "окна" на оценки спектра возьмем оценки функции спектральной плотности для отфильтрованного показателя валового национального продукта (∇GNP), рассчитываемые с "окном" Тьюки-Хеннинга и "окном" Парзена (рис 7). Как видим, использование "окна" Парзена дает более гладкую и более общую картину спектра.

В практических расчетах удобнее пользоваться не угловой частотой ω , выраженной в радианах, а частотой $f_i = \omega_i / 2\pi$, измеренной в циклах за единицу времени, и периодом $T_i = 1 / f_i$. Условимся называть процесс медленным, если его период велик (частота мала), и быстрым, если период мал (частота велика). Частоты, близкие к нулю, принято называть низкими частотами, а частоты в окрестности частоты, равной $1/2$ - так называемой частоты Нейквиста - высокими. Самая медленная периодическая кривая (кривая с максимальным периодом), которую можно наблюдать для дискретного конечного процесса длины N , имеет период N , а самая быстрая (с наименьшим периодом), доступная наблюдению, - период $1/2$ (частота Нейквиста). Таким образом, f может меняться от 0 до $1/2$ и принимать столько значений, сколько задано лаговых сдвигов τ .

Надежность оценок можно повысить, если в расчетах рассматривать не все N значений функции автоковариации, ибо с ростом сдвига каждый ее коэффициент получается на основе все уменьшающегося количества данных [Болч, Хуань, 1979, с.273].

Назовем число $L < N$ точкой усечения автоковариационной функции. В расчетах ФСП будут использоваться L значений функции автоковариации. Выбор осуществляется всякий раз в зависимости от задачи, так как если взять L малым, то получим довольно гладкую функцию спектральной плотности с незначительной дисперсией; при этом могут быть не обнаружены важные циклические составляющие, хотя они имеются в динамике процесса. С ростом же L уменьшается смещение пика от важной частоты, но растет дисперсия оценок ФСП, и для достаточно больших L падает их надежность. Это объясняется тем, что в расчетах при больших L используются ненадежные оценки автоковариации слишком далеких точек временного ряда.

Таким образом, оценки ФСП рассчитываются по модифицированному интегральному преобразованию Фурье усеченной автокорреляционной функции. Как известно, функция автокорреляции несет в себе всю необходимую информацию о цикличности процесса. Спектральные оценки могли быть получены и интегральным представлением исходного ряда, а не автокорреляций, и этот подход часто используется для технических задач. Но в исследовании экономических процессов важна (а для коротких рядов особенно) возможность повысить надежность спектральных оценок. Интегральное представление Фурье автокорреляционной функции и использование "окон" позволяют получить состоятельные оценки функции спектральной плотности, рассчитывать меньшее число значений автокорреляционной функции и тем самым повысить надежность оценок. Оценка вклада в дисперсию ряда не отдельной частоты, а интервала частот $[f_i \pm \Delta f]$ позволяет достаточно строго оценить периодическую лишь в среднем по интервалу частот составляющую компоненту исследуемого процесса.

Уменьшая число частотных интервалов L , и, соответственно, увеличивая их длины и уменьшая число вычисляемых значений функции автокорреляции можно обобщить представление о структуре процесса. Увеличивая L - конкретизировать его до разумных

пределов. Перечисленные возможности особенно важны при анализе коротких временных рядов.

Усредненная периодограмма. Выбирается интервал длиной p и для него рассчитывается сглаженная периодограмма. Выбирается сдвиг, и расчет повторяется, пока не закончится ряд. Итоговая оценка получается усреднением всех полученных для данной частоты значений автоковариаций, что позволяет снизить роль нестационарности и получить оценки в других частотах. Недостатком является увеличение дисперсии оценок по сравнению с использованием сглаженной периодограммы на всем временном интервале без усреднения.

Лекция 6. Исследование отклика оценок ФСП на изменения параметров расчета и циклических компонент ряда

Для практического освоения аппарата спектрального анализа нами была проведена серия расчетов на тестовых примерах. Строились ряды с заранее известными периодическими составляющими, и исследовались зависимости значений спектров от задаваемых параметров ряда и числа частот. Значения периодических рядов были рассчитаны по формуле:

$$Y(t) = \mu + A_1 \cos(2\pi f_1(t - \theta_1)) + A_2 \cos(2\pi f_2(t - \theta_2)).$$

В большинстве примеров выбиралась частота $f_1 = 0,25$ - как наиболее часто встречающийся в динамике экономических рядов капиталистических стран цикл. Эта составляющая представляет синусоиду с четырехлетним периодом. Вторая частота f_2 задавалась, равной $0,06$ - как пример низкочастотного колебательного процесса с периодом, примерно равным 16. Как отмечалось, для получения надежных оценок функции спектральной плотности следует задавать число лаговых сдвигов функции автоковариации равным от $1/3$ до $1/4$ объема выборки.

С увеличением L возрастает дисперсия выборочной спектральной плотности и падает надежность оценок, а при его уменьшении можно получить настолько смещенные оценки, что они не будут соответствовать действительности. Для иллюстрации влияния величины L на оценки рассмотрим поведение спектра искусственного ряда, представляющего сумму двух периодических гармоник $Y(t) = 3 + 5\cos(2\pi 0.25(t-3)) + 5\cos(2\pi 0.06(t-1))$. Амплитуды и фазы фиксированы, меняется только L . На рис. 8 можно проследить зависимость оценок ФСП от значения числа L .

Гладкость ФСП, характерная для всех графиков рис. 8, для детерминированного процесса $Y(t)$ объясняется применением "окна" (в данном случае "окна" Парзена). При достаточно малом L ($L = 4$) ФСП убывает на всем частотном интервале, никак не отражая структуру ряда. Это объясняется тем, что было выбрано слишком грубое разбиение частотного интервала. С увеличением L ($L = 8$) наблюдается некоторое оживление в оценках ФСП, и, наконец, при достаточно большом L ($L = 16$) наблюдаются четко выраженные всплески ФСП в частотах, соответствующих заданным периодичностям исходного процесса. Дальнейшее увеличение L оказалось нецелесообразным, так как привело к росту разброса оценок ФСП. На практике следует подбирать L в зависимости от потребностей счета и длины ряда. Как правило, с целью уточнения оценок ФСП проводится несколько вариантов расчетов при различных L . Практические расчеты показывают, что для отыскания пика в достаточно низкой частоте анализ рекомендуется начинать с $L \leq 1/f$, где $1/f = T$ - период интересующей нас частоты f , и постепенно увеличивать L до 30-40% длины ряда.

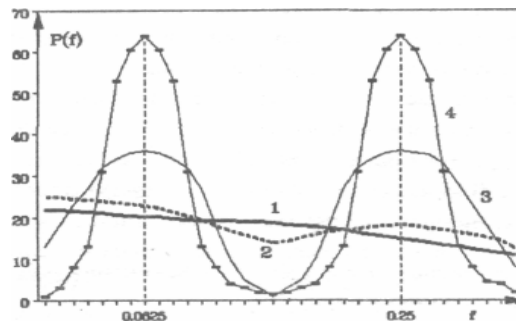


Рис. 8. Влияние числа разбиений на спектральные оценки. 1-L=4; 2-L=8;3-L=16;4-L= 32.

Вторая серия расчетов была посвящена выяснению реакции спектров на изменение соотношения амплитуд составляющих гармоник. Суммарная мощность спектральных оценок зависит, как указывалось ранее, от числа получаемых значений функции автокорреляции. В зависимости же от реальных значений амплитуд ряда происходит перелив мощности спектра по мере увеличения амплитуды в одной частоте из частоты, соответствующей гармонике с меньшей по значению амплитудой, в частоту, соответствующую компоненте с большей амплитудой. Из результатов следует, что слабовыраженный пик ФСП в некоторых случаях заслуживает внимания, так как иногда является результатом присутствия в динамике ряда реальной зависимости. Тогда малую высоту всплеска можно объяснить тем, что вклад соответствующей ей гармоники в общую дисперсию мал, т.е. значительная часть мощности сосредоточивается около частот, соответствующих гармоникам с большей амплитудой.

Чтобы проследить отклик оценок ФСП процесса на изменение амплитуды одной из двух его составляющих, была проведена серия экспериментальных расчетов. Выбиралось оптимальное для данного случая число разбиений частотного интервала $L=16$. Все параметры исходного ряда оставались неизменными, кроме амплитуды одной составляющей – A_1 . Ее величина возрастала, начиная с $A_1 = 1$. Амплитуду первой гармоники A_1 увеличивали от варианта к варианту, сохраняя постоянным значение амплитуды второй гармоники A_2 . Полученные в заданных частотах оценки ФСП $P(f_1)$ и $P(f_2)$ приведены в таблице 3. Как видно из таблицы, суммарная мощность $P(f_1)+P(f_2)$ спектральных оценок в частотах $f_1 = 0.06$ и $f_2 = 0.25$ остается примерно постоянной и в зависимости от величины амплитуды A_2 распределяется по частотам. На рис. 9 даны наиболее наглядные спектры для рядов X с $A_1=1$, $A_2=5$ и $A_2=15$, что соответствует вариантам 1, 3 и 6 в табл. 3.

Таблица 3

Распределение спектральных оценок $P(f_i)$ в зависимости от соотношения амплитуд периодических компонент ряда

N вари-	A11	A22	P(Γ_1)	P(Γ_2)	P(Γ_1)+P2(Γ_2)
1	1	5	0.47	10.44	10.91
2	3	5	2.89	8.02	10.91
3	5	5	5.41	5.51	10.92
4	7	5	7.15	3.66	10.91
5	10	5	8.65	2.265	10.91
6	15	5	9.74	1.17	10.91
7	40	5	10.67	0.229	10.90
8	45	5	10.708	0.193	10.90

Теоретический спектр строго детерминированного процесса представляет скачки функции в заданных частотах. Ненулевые значения в остальных частотах и гладкий характер графиков, полученные в проведенных расчетах, объясняются сглаживанием оценок, вследствие введения "окна" Парзена.

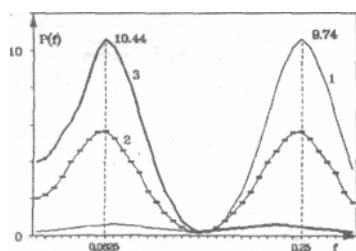


Рис.9 .ФСП для 1,3,7-го вариантов таблицы 3

Приведенные графики помогают интерпретировать результаты расчетов, полученных для реальных процессов с неизвестной структурой. Влияние роста амплитуды у первой составляющей на перелив мощности спектра из одной частоты в другую иллюстрирует рис. 9. При равных амплитудах получаются равные спектральные оценки. С ростом A_1 происходит перелив мощности спектра из одной частоты в другую.

При этом сумма оценок остается неизменной, что соответствует частному случаю теоремы Парсеваля о распределении среднеквадратической мощности процесса на вклады циклических составляющих. Как видим, незначительный всплеск ФСП может указывать на наличие гармоник в структуре ряда, мощность которой относительно других составляющих сравнительно мала, но, тем не менее, она присутствует в динамике ряда.

Изменения среднего значения и фаз не оказали существенного влияния на спектральные оценки из-за нормирования значений функции автоковариации и неспособности ФСП одномерного процесса отражать фазовый сдвиг. Многочисленные расчеты для реальных экономических показателей, проводимые при измененной длине временных рядов, подтвердили, что и при малой длине рядов оценки функции спектральной плотности достаточно устойчивы к изменению длины расчетного периода.

Описанные результаты показывают, что спектральные оценки с большой точностью воспроизводят циклическую структуру ряда: наличие периодических составляющих отражается всплесками ФСП, а соотношения амплитуд соотношениями величин всплесков. При этом относительно малые по величине всплески ФСП могут быть проявлением реально существующей зависимости в данных.

Чтобы продемонстрировать влияние преобразования реальных экономических данных на спектральные оценки, рассмотрим результаты анализа динамики статистических рядов валового национального продукта США (GNP), взятого с I квартала 1953 г. по IV квартал 1978 г. в неизменных ценах 1972 г.

В экспериментах GNP был представлен в виде рядов абсолютных значений, а также в виде его абсолютных и относительных приростов (рис. 10). Расчеты проводились при $L=40$, что составляло менее 40% выборки. Оценки можно считать надежными и, так как было использовано "окно" Парзена, состоятельными.

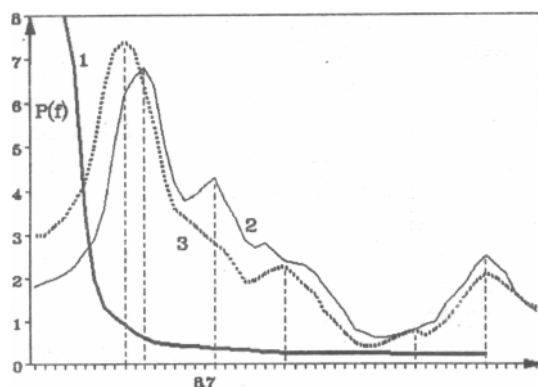


Рис. 10.Оценки функции спектральной плотности: 1-абсолютных значений GNP; 2-абсолютных приростов GNP; 3-относительных приростов GNP

Спектральные оценки непреобразованного ряда валового национального продукта указывают на наличие в его динамике тренда среднего: вся мощность кривой 1 (рис. 10) сосредоточена в частотах, близких к нулевой частоте и соответствующих гармоникам с

периодами $T > N$; в остальных частотах оценки функции спектральной плотности близки к нулю.

Оценки ФСП исходного ряда после удаления из него тренда среднего с помощью фильтра, заданного как линейное преобразование $\nabla X(t) = X(t) - X(t-1)$, показаны на рис. 10, кривая 2. В результате применения этого фильтра сглаживаются медленно меняющиеся компоненты ряда $X(t)$ и выделяются его быстро меняющиеся составляющие. В нашем случае расчеты спектральных оценок абсолютных приростов GNP показали, что, перейдя к приростам, удалось значительно уменьшить в динамике процесса влияние тренда среднего: значения ФСП в окрестности нулевой частоты стали достаточно малы; в других частотах получены всплески спектральной плотности. Кривые 2 и 3 на рис. 10 указывают на наличие незначительно смещенных пиков для рядов ∇GNP и $\nabla GNP / GNP$ в частоте с периодом 18-20 кварталов, что в некотором смысле подтверждает их достоверность.

В практических расчетах часто очень важно определить ФСП в конкретном интервале частот. Если всплеск ФСП там незначителен, то один из вариантов уточнения спектральной оценки в окрестности этой частоты, кроме уже обсуждаемых, - это сглаживание спектра в других частотах, в которых ФСП имеет высокие всплески. Для этого из ряда удаляются остальные циклические составляющие, и тем самым обеспечивается возможность "проявиться" интересующей нас частоте, в которой в результате проведенных преобразований будет сосредоточена большая часть мощности спектра. Позднее это будет продемонстрировано на примере работы с динамикой производства зерна в СССР. Реальные экономические процессы в большинстве своем можно представить как спады и подъемы, "нанизанные" на основную тенденцию. Для таких нестационарных процессов мощность ФСП сосредоточена в низких частотах (окрестности 0) и резко уменьшается с ростом частоты. На рис. 11 приведены примеры оценок ФСП, полученных по фактическим данным. На рис. 11(а) хорошо видна нестационарность исследуемого процесса производства чугуна: вся мощность ФСП сосредоточена около нуля.

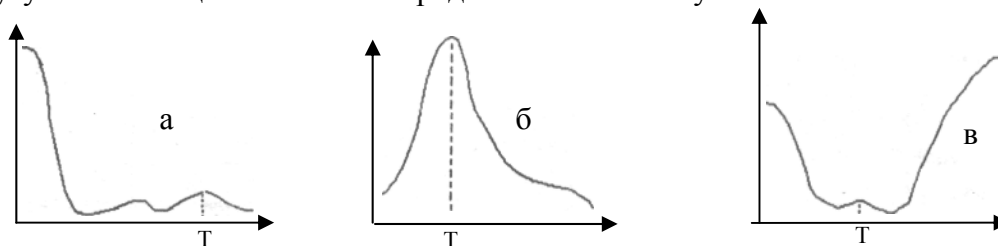


Рис. 11. Оценки ФСП приростов производства в 1956-1985 гг. в СССР; а - чугун (тыс.т); б - культиваторы тракторные (тыс.шт); в - бульдозеры (шт).

На рис. 11 (б) имеет место сильный всплеск в частоте с $T = 6.8$ (здесь и далее в целях удобства вместо частоты по горизонтали будем откладывать период). Анализируя значения ФСП на всем интервале частот $[0, 0.5]$, можно сделать вывод, что процесс производства тракторных культиваторов стационарен и его динамику с высокой вероятностью определяет мощная циклическая составляющая, период которой варьирует около значения $T = 6.8$ года. Динамика ряда в третьем примере формируется под приблизительно равным влиянием тренда среднего и очень быстрых колебаний.

Итак, при нестационарности процесса (в частности, наличии тренда среднего) мощность ФСП сосредоточивается около нуля; при наличии циклических составляющих в соответствующих частотах имеется всплеск, отражающий вклад гармоник в дисперсию ряда. Если ряд слишком "зубчат", ФСП резко возрастает в высоких частотах. График самого ряда и дополнительные расчеты позволяют сделать вывод о причинах нестационарности и наметить возможные способы ее устранения.

Для задач, связанных с измерением и моделированием закономерностей, имеющих циклический характер, оценивание тренда приобретает другой смысл: необходимо удалить основную тенденцию изменений, как можно меньше исказив при этом динамику ряда и сохранив в отклонениях от тренда по возможности все поворотные точки.

Смысл удаления тренда в данном случае заключается в фильтрации длительных зависимостей в данных и получении стационарного остатка. Значения ФСП в окрестности нулевой частоты можно использовать для оценки степени нестационарности процесса. Для исследования динамики нестационарных процессов предлагается очень осторожная фильтрация с постоянным контролем с помощью функции спектральной плотности. Процесс фильтрации следует прекращать, как только начнут появляться всплески в других частотах (или получен белый шум) при достаточно малом значении ФСП в окрестности нуля. Это будет означать, что динамику преобразованного ряда определяет не тренд, а некоторая закономерность, близкая к периодической, если только мы не имеем дело с белым шумом.

Для использования спектральной техники необходимо удалить тенденцию изменения среднего или хотя бы уменьшить ее настолько, чтобы начала "работать" ФСП.

Исследование динамики производства зерна в СССР

В качестве одного из примеров рассмотрим производство зерна в СССР за 1956-1985 гг. Анализ динамики урожайности зерна в южных широтах Западной Сибири, проведенный А.П. Слядневым [1982], показал синхронную зависимость урожайности от циклических изменений агроклиматических условий. В изменениях природно-климатических условий наблюдается 32-35-летняя периодичность в степени увлажнения, обусловленная чередованием типов циркуляции в атмосфере. Каждые 16-18 лет в мае-июне зональная циркуляция сменяется меридиональной, которая обуславливает большую вероятность засушливой погоды в эти месяцы и недостаток осадков зимой. Выявление этой периодичности важно и для нашего исследования, так как воздействие циркуляции распространяется, по-видимому, на объем всего урожая по всей стране. Автор не обнаружил более быстрых периодичностей, так как при работе со статистикой сгладил показатели 10-летней средней.

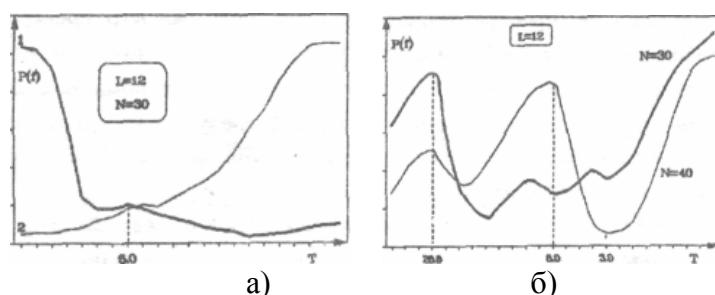


Рис. 11. ФСП ряда производства зерна в СССР,

- а: 1 - исходные данные за период 1955-1985 гг.;
- а: 2 - абсолютные приросты за период 1955-1985 гг.;
- б: 1 - в 1955-1985 гг. исходные данные после удаления линейного тренда;
- 2 - в 1945-1985 гг. абсолютные приросты после сглаживания 3-летней средней.

Возрастающая в среднем основная тенденция производства зерна в целом по стране к концу рассматриваемого периода сменяется некоторым убыванием. О нестационарности ряда свидетельствовали и оценки ФСП, полученные для не преобразованных данных при различных частотных разбиениях. Преобразование ряда методом первых разностей, т.е. переход к ряду абсолютных приростов, позволил значительно уменьшить роль длительных тенденций в динамике процесса.

Для такого показателя, как прирост производства зерна, характерны резкие колебания относительно горизонтали. Подтверждением этого факта служит и ФСП, изображенная на рис. 11,а,2. Влияние зазубренности настолько велико, что на всем частотном интервале ФСП непрерывно растет от 0.11 в окрестности нуля до 6.8 в частоте Нейквиста. Ее мощность сосредоточена в окрестности частоты 0.5, и это затрудняет отражение функцией спектральной плотности других колебаний процесса, влияние которых в формировании динамики значительно слабее. Попытка уменьшить влияние быстрых частот (частот в

окрестности частоты 0.5) с помощью сглаживания скользящей трехлетней средней самого ряда привела к усилению оценок в окрестности нуля, т.е. сглаживание увеличило роль медленных флуктуаций в формировании изменений значений ряда.

Более подробные сведения о структуре процесса удалось получить, уменьшив роль тренда с помощью регрессии на фактор "время".

$$X = 113,816 + 3.037t; \quad R^2 = 0.58, DW = 2.08, S = 23.3. \\ (6,37)$$

Коэффициент детерминации R^2 показал, что полином первой степени - не лучший вид модели для тренда, но его удаление из ряда позволило снизить влияние длительных тенденций и уточнить оценки ФСП в средних и высоких частотах (рис. 11,6). Анализ остатков показал, что ряд остатков содержит нелинейный тренд (ФСП имеет пик в частоте с $T = 26,6$ года) и две незначительные по мощности циклические составляющие с $T=6$ лет и $T=3$ года. По-прежнему важны оценки в окрестности частоты 0.5. Оценки ФСП достаточно устойчивы к изменениям длины временной базы. Так, для ряда зерна все результаты, полученные на базе 1956-1985 гг., были подтверждены многовариантными расчетами на более длинном интервале: на базе 1945-1985 гг.

На рис. 11,6 (кривая 2) оценки ФСП ряда абсолютных приростов производства зерна после сглаживания 3-летней средней указывают на важную полосу частот в окрестности $T = 5,7$ лет, обнаруживают отчетливый всплеск в окрестности частоты с $T = 26,6$ года и имеют впадину в окрестности частоты с $T = 3$ года, как следствие сглаживания. Меньшая высота всплеска, обусловленного длительной тенденцией, чем высота в частоте с $T = 5,7$ лет, объясняется, недостатком фильтра разностей - он искажает динамику ряда, как бы выдвигая на первый план быстрые изменения в данных, и заглушает тем самым длинноволновые тенденции.

Таким образом, результаты многовариантных расчетов позволяют сделать вывод, что динамику производства зерна определяет некоторый рост среднего, на который накладывается длительная нелинейная тенденция, и ее изменения не противоречат 33-35 летнему циклу природно-климатических условий, приведенному Слядневым. Следующим по значимости фактором, определяющим формирование динамики производства зерна, является чередование роста и падения - зазубренность ряда, и уже на фоне этих двух составляющих выявляются 3-летняя и 6-летняя зависимости. Трехлетняя компонента была нами обнаружена в производстве многих сельскохозяйственных культур и связана она с чередованием урожайных и неурожайных лет. Шестилетняя периодичность может быть также проявлением воздействия природных факторов - аналогичная периодичность обнаружена в чередовании колец на срезах деревьев. Одиннадцатилетний солнечный цикл в исследуемом ряду не проявился. Возможно, что его влияние незначительно.

Лекция 7. Особенности применения спектрального анализа к исследованию коротких временных рядов

Спектральную технику используют обычно для временных рядов длиной от нескольких сотен до нескольких тысяч наблюдений. В экономических данных такую длину могут иметь ряды ежедневной, еженедельной либо ежемесячной конъюнктурной информации по товарным рынкам. В остальных областях экономики самыми длинными рядами можно назвать квартальную послевоенную статистику и годовые ряды промышленного производства развитых капиталистических стран. Их длина составляет от 100 до 200 наблюдений. В настоящее время в связи с оживленным интересом к теории длинных волн часто прибегают к анализу годовых данных. Длина ряда определяется потребностями задачи. Для управленческой деятельности важно знать законы, которые хотя и проявляются на фоне каких-либо длительных тенденций, но их воздействие на экономическую жизнь является определяющим для сравнительно короткого временного интервала и важны для краткосрочного и среднесрочного прогнозирования. Иногда приходится работать с короткими рядами и по другим объективным причинам. Так, для многих показателей экономи-

ческого развития СССР не существовало длинных годовых рядов. Задавая длину интервала наблюдений, мы фактически фильтруем ряд, исключая возможность наблюдать в динамике цикличности с периодом, превышающем его длину. В коротких рядах фрагменты длинных волн воспринимаются как тренды.

Короткими временными рядами будем называть ряды, имеющие 20-50 наблюдений. Проблемы исследования таких рядов связаны, прежде всего, с надежностью получаемых оценок функции автоковариации и рассчитываемых на их основе оценок функции спектральной плотности. В теории временных рядов принято считать оценку ФСП надежной, если длина периода выделенной циклической составляющей 5-7 раз укладывается в длину ряда. Поэтому размерность многих экономических рядов служила препятствием для анализа их динамики. Например, при длине ряда $N=30$ лет, период в 9-10 лет укладывается в длину ряда всего трижды, а период, длиной 5-6 лет 5-6 раз.

Условимся называть для рядов в 20 -50 наблюдений зависимости в данных, проявляющиеся через 8-12 и более лет, длительными или медленными, через 4-8 - средними и менее 4 лет - короткими или быстрыми. Заметим, что значения функции автокорреляции, на основе которых получаем оценки ФСП, при $N = 30$ с вероятностью 0,95 отличимы от нуля тогда, когда они превышают значение 0,36, и с вероятностью 0,9, если они больше 0,3 на основании таблицы критических точек распределения Стьюдента.

Надежность оценок периодов колебаний падает с ростом периода. В связи с этим следует осознавать качественную разницу спектральных оценок в различных частотах. Длительные зависимости нельзя считать надежными, и поэтому вопрос о них как закономерностях процесса остается открытым. Чтобы сделать вывод о том, что выявленные длительные зависимости являются закономерностями, внутренне присущими развитию данного процесса, следует, если возможно, перейти к рассмотрению показателя за 100 и более лет, либо привлечь дополнительные качественные представления о процессе. Средние и короткие цикличности с большей вероятностью можно считать закономерностями развития.

Еще одна проблема, которая приобретает для коротких рядов особую остроту - это нестационарность процессов. Чтобы как можно меньше исказить динамику ряда, не потерять ценные наблюдения и избавиться от тренда среднего, для коротких рядов представляется оправданным построение полиномиальных трендов с целью получения доступа к отклонениям фактических данных от тренда и извлечения сведений о скрытых в динамике ряда закономерностях. Постепенно увеличивая степень полинома, мы можем контролировать влияние фильтрации, строя график ФСП отклонений от тренда. Следует прекратить процесс повышения степени полинома сразу, как только ФСП начнет "работать", т.е. как только всплеск ФСП в окрестности нулевой частоты уменьшится настолько, что станет возможным судить о структуре процесса по оценкам ФСП в остальных частотах.

На практике степень полинома для коротких экономических рядов, как правило, не превышает двух. Включение третьей степени чаще всего ухудшает статистические характеристики уравнения (коэффициент при этом факторе получается незначимым и увеличивается ошибка аппроксимации.)

Для моделирования процессов важно знать, имеется ли тренд среднего. Во многих случаях достаточно анализа графика, но иногда нельзя дать уверенный ответ. Можно прибегнуть к статистическому критерию Манна для проверки наличия тенденции ряда к возрастанию или убыванию [Барлоу, Прошан, 1969]. Как показали наши расчеты, использование критерия Манна дает однозначный ответ о наличии или отсутствии тренда в данных, но при использовании спектральной техники нам представляется расчет критерия совершенно излишним.

Функция спектральной плотности дает исчерпывающую информацию о нестационарности процесса: о наличии тренда и его роли в формировании дисперсии. По соотношению оценки в нулевой частоте и величин всплесков в остальных частотах ФСП позволяет понять роль в динамике ряда его составляющих компонент.

Измерение, моделирование и прогнозирование циклической динамики на примере показателей развития экономики СССР

Задача исследования коротких временных рядов на основе спектрального анализа родилась из практической потребности изучения динамики производства продуктов на народнохозяйственном уровне. Исследования динамики выпуска некоторых видов продукции в СССР за 1956-1985 гг. требовали вопросы: существует ли цикличность в экономике в условиях централизованного управления и строгого планирования; как идентифицировать поворотные точки в динамике процессов; как определить, насколько важны и значительны закономерности повторения сокращений и увеличений объемов производства продукции и как они распространяются по всей системе хозяйства?

Рассматриваемый нами временной интервал начинается, когда в целом были преодолены последствия войны, и заканчивается концом до перестроечного периода, когда набирающая темпы развития восстановительная экономика в условиях жесткого командно-административного управления исчерпала свои возможности. В первую очередь это проявилось в снижении объемов производства. Процесс стагнации с последующим резким спадом объемов производимой продукции начался в 70-е годы. На графиках объемов производства продуктов и их приростов видна нестабильность выпуска, наглядно демонстрирующая невозможность рационально планировать экономическую жизнь общества и управлять ею снизу доверху. Существовала ли какая-либо логика в резких колебаниях в объемах производств? Чтобы получить ответ необходимо применить аппарат спектрального анализа, позволяющий статистически оценить закономерности появления всплесков и отделить их от чисто случайных. Обнаружив закономерность, следует задуматься о причинах ее появления, прогнозировать ее и принимать своевременные меры для смягчения ожидаемого падения производства (или неоправданного роста?).

Анализ был проведен для репрезентативной выборки (исследовалась динамика производства 137 видов продуктов) объемов производства продукции по народному хозяйству, взятых за 1956-1985 гг. в натуральном измерении. (Данные были собраны по ежегодным справочникам "Народное хозяйство СССР" с 1957 по 1985 гг.).

В информационном массиве достаточно полно представлена продукция добывающих отраслей, отраслей, производящих товары производственно-технического назначения - металлургии, химии, энергетики, машиностроения, а также продукция конечного потребления - пищевой и легкой промышленности, сельского хозяйства, производство пассажирского транспорта и автомобилей.

Несмотря на многообразие динамики процессов, все ряды обрабатывались по единой методике. Для всех рядов тренд среднего удалялся методом первых разностей. В преобразовании Фурье автокорреляционной функции использовалось "окно" Парзена, обеспечивающее лучшее сглаживание оценок. На таких коротких рядах целесообразно применять веса, позволяющие получать более обобщенные и точные оценки.

На первом этапе спектральному анализу были подвергнуты не преобразованные исходные данные по производству продуктов. Спектральный анализ самих показателей лишь подтвердил нестационарность процессов, наблюдаемую на графиках. Для рядов же приростов производства продукции получились разнообразные и неожиданные результаты.

Одновременный анализ графиков приростов (приложение 1) и графиков ФСП показал, что ФСП очень чутко реагирует величиной оценки в окрестности нулевой частоты на степень нестационарности процесса, проявляющуюся в изменениях среднего. По характеру развития процессов нами было выделено семь групп. На рис. 12 схематично представлены характерные для четырех первых групп типы динамики.

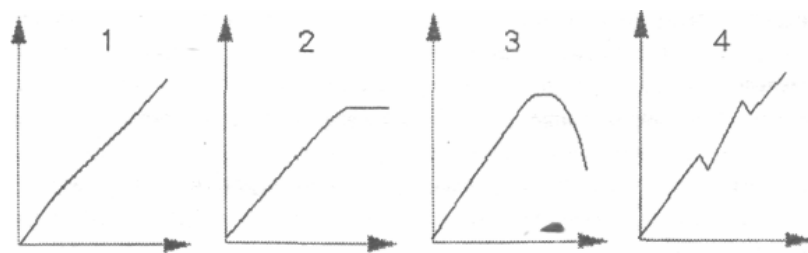


Рис. 12. Динамика групп показателей выпуска некоторых видов продукции в СССР в 1955 - 1985 г.

Спектральный анализ коротких рядов по производству продуктов, взятому в натуральном измерении, выявил в некоторых рядах приростов 5-летние составляющие, 6-8 летние зависимости в сельскохозяйственном машиностроении. 3-летний природный цикл в объемах производства продукции растениеводства и ее переработки; 8-12 летнюю зависимость в производстве продукции многих важных отраслей народного хозяйства, а также фиксировал отсутствие циклических закономерностей в некоторых рядах приростов.

Объектами исследования, моделирования и прогнозирования служили также стоимостные макропоказатели по развитию экономики страны в 1965-1985 гг, взятые в текущих ценах: произведенный национальный доход (рис.14.млрд руб.), национальный доход, использованный на накопление и потребление (млрд руб.), фонд накопления в национальном доходе (млрд руб.), валовой общественный продукт (рис.13.млрд руб.), продукция первого общественного подразделения (млрд руб.), сальдо внешней торговли плюс потери (млрд руб.); в ценах 1984 г.: объем основных производственных фондов (млрд руб.), фонд возмещения (млрд руб.), ввод в действие основных производственных фондов (млрд руб.), прирост незавершенных капиталовложений (млрд руб.), производственные капитальные вложения (млрд руб.), выбытие основных производственных фондов (млрд руб.) численность занятых в материальном производстве (млн чел.), фондотдача (руб./руб., в текущих ценах). Длина расчетной базы составляла 21 год. Выбранные границы временного интервала объясняются необходимостью совместного рассмотрения закономерностей, проявившихся в развитии НТП в эти годы, и закономерностей макроэкономики.

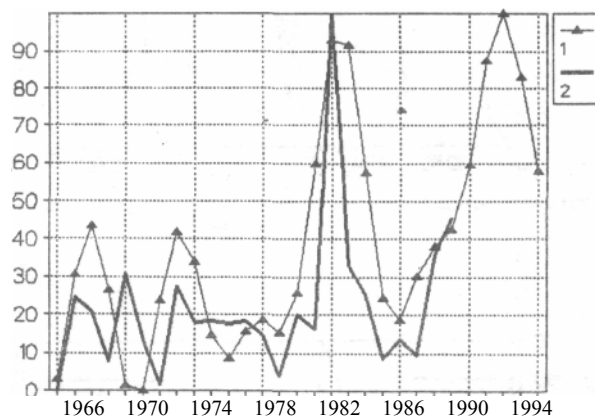
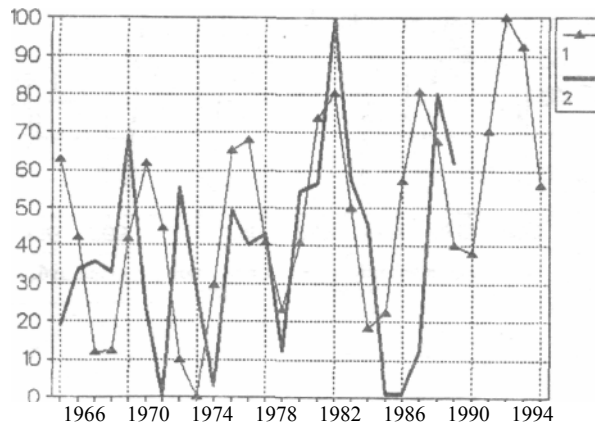


Рис.13. Валовой общественный продукт, млрд руб. (в текущих ценах); расчетные значения: 1965-1985 гг.; 1986-1988 гг. - ex-post-прогноз; 1989-1994 гг. - ex-ant-прогноз; фактические данные - (1965 - 1988 гг.)

Этот интервал интересен тем, что охватывал период от первых попыток ослабить централизацию управления хозяйством до начала реформ, направленных на предоставление полной хозяйственной самостоятельности.



**Рис 14. Произведенный национальный доход, млрд руб. (в текущих ценах);
расчетные значения: 1965-1985 гг.; 1986-1988 гг. - ex-post-прогноз;
1989-1994 гг. - ex-ant-прогноз; фактические данные - (1965 - 1988 гг.)**

Успешное включение в модель циклических составляющих, выявленных и оцененных с помощью функции спектральной плотности, позволило нам построить модель, представляющую суперпозицию модели тренда и модели случайных отклонений. Малое количество наблюдений налагало особые условия на удаление тренда для получения стационарного остатка, а задача моделирования исключала непараметрические способы его исключения из процесса. Так как любой фильтр связан с искажением оценок ФСП, следует отчетливо представлять характер искажений при работе с короткими рядами. На первом этапе моделирования строится регрессия от фактора t , затем в зависимости от результатов полученного уравнения в него включаются более высокие степени фактора t до тех пор, пока не начнет "работать" ФСП, рассчитываемая каждый раз для рядов случайных отклонений регрессионного уравнения. Для контроля проводимых преобразований необходимо было строить графики тренда и отклонений после каждой итерации. Оценки ФСП и анализ этих графиков предопределял на каждом этапе дальнейшие действия. Как только ФСП обнаруживала важные частоты, переходили ко второму этапу построения модели оценивания циклической динамики случайных отклонений и их моделированию на основе получаемых оценок. В сомнительных случаях для уточнения оценок ФСП полезно проводить многовариантные расчеты с использованием фильтра разностей, скользящих средних, применением различных окон.

Построение модели, по сути, является последовательным усложнением фильтра, на вход которого поступает исходный процесс, а на выходе должен получиться белый гауссов шум. Компоненты ряда отфильтровываются в соответствии с их убывающей мощностью. При этом частоты удаляемых составляющих принимают любое значение из частотного интервала, т.е. иногда длительные тенденции проявляются на фоне быстрых флуктуации. Так, например, в динамике выбытия основных производственных фондов после фильтрации гармоники с периодом 4.3 года была обнаружена 8-летняя составляющая. Она проявилась и во вводе в действие основных производственных фондов, но там она имела большую мощность, нежели выявленная зависимость с периодом в 4.3 года. Но самым потрясающим, был полученный прогноз в 1991 г.! С 1992 года он предсказал кризисное падение, притом, что расчетная база закончилась еще в 1985 году.

Т. е. уже тогда были в наличии все кризисные предпосылки. Великолепный прогноз!!

На рисунке 13 приводится подробная схема итеративного построения модели стохастического процесса, представленного временным рядом, как суперпозиции модели тренда и модели случайных отклонений с зависимыми значениями. Отдельная оценка ФСП мало информативна. Чтобы сделать выводы о динамике ряда, необходимо проанализировать ФСП на всем частотном интервале $[0, 0.5]$. Как показала практика, важно иметь как числовое, так и графическое представление оценок ФСП. Если ФСП имеет резко выделяющийся симметричный всплеск, то ряд содержит флуктуации, близкие к периодиче-

ским, с длиной периода равной обратной частоте, в которой наблюдается пик функции, и включение цикличности в модель проходит успешно. Острым и высоким пиком оценка ФСП отражает важную флуктуацию близкую к синусоиде с полученным периодом. Включение такой синусоиды в модель дает удивительные результаты. По статистической оценке периода рассчитываются два временных ряда значений функций косинуса и синуса, имеющих равные амплитуды и периоды, включение которых в модель позволяет по регрессионным коэффициентам в дальнейшем вычислить при необходимости амплитуду и фазу циклической составляющей.

В этом случае коэффициенты при синусе и косинусе существенны, коэффициент множественной детерминации R^2 возрастает, среднеквадратическое отклонение S уменьшается (иногда очень существенно), а DW приближается к значениям, свидетельствующим об отсутствии автокорреляции в модельных ошибках. При этом в спектральных оценках отклонений от тренда, включающего синусоиду, не будет пика в частоте, соответствующей ее периоду, что прямо подтверждает правильность предыдущей оценки ФСП, указавшей на ее наличие в динамике процесса. Не всегда удается аппроксимировать флуктуации, на которые указали всплески ФСП, столь удачно.

Чаще всплеск имеет несимметричную форму, и тогда значения ФСП в окрестности экстремума функции дают понять, что следует предпринимать для уточнения периода включаемой в фильтр циклической составляющей: увеличить его или уменьшить в пределах величины, обратной $\pm \nabla f$. О том, насколько верно оценен период, позволяют судить статистики регрессионного уравнения. Если период оценен верно, то улучшаются регрессионные оценки относительно предыдущего варианта, не содержащего искомого циклическую компоненту. Но более чувствительным критерием правильности включения циклических факторов в правую часть уравнения модели оказывается функция спектральной плотности. Если период цикличности определен неверно или неточно, то в оценках ФСП, рассчитанных для ряда отклонений, сохранится всплеск в частоте, обратной этому периоду. В случае верной усредненной оценки периода всплеск ФСП в этой частоте исчезает. Если в модель тренда включается цикличность, которой нет в динамике процесса, коэффициенты ее регрессии будут несущественны и, самое главное, ФСП отклонений в соответствующей частоте будет иметь мощный всплеск.

Таким образом, спектральные оценки отклонений фактических значений от модельных мы предлагаем использовать в качестве критерия оценок цикличностей, включенных в модель. После того как из отклонений удалена самая мощная составляющая, ФСП может указать всплеском на другую частоту, которая на первом этапе расчетов либо совсем не проявлялась, либо имела существенно меньший всплеск. В зависимости от потребностей задачи и необходимой степени приближения моделируемых значений к исходным данным построение модели завершается либо продолжается до получения белого шума в качестве отклонений регрессионного уравнения. В ряде случаев были получены такие модели, но чаще итерационный процесс заканчивался при достижении необходимой исследователю степени точности модельных расчетов на имитационном периоде.



Рис. 13 Схема итеративного процесса построения циклической модели временного ряда на основе оценок спектрального и регрессионного анализов

Заключение

Системный анализ динамики натуральных показателей выпуска продукции за 30-летний период выявил в некоторых отраслях народного хозяйства страны закономерности чередования спадов и подъемов производства. При анализе и оценке структуры отдельного процесса оценивались причины, которые формировали процесс. Предложенный подход дает прогноз отдельного процесса на основе закономерностей, выявленных ретроспективным анализом. Рассчитывая прогноз, следует помнить о длине базового периода. На вековых рядах можно исследовать долговременные тенденции, которые в коротких выборках могут проявляться в виде тренда. Интерпретация результатов должна опираться на знание предпрогнозного периода. Так, невозможно предсказать глубину экономического кризиса начала 90-х годов лишь на анализе последних трех десятилетий. Проведенные ис-

следования дают возможность оценить влияние механизмов, возникших после 50-х годов. Однако для более глубоких выводов следует обратиться к динамике вековых процессов, комплексно рассматривая полученные результаты.

Как всякий статистический прогноз, прогноз с учетом зависимостей, близких по своему характеру к периодическим, выполняется при определенных условиях и является лишь инструментом в руках эксперта. Его задача - выявить и дать анализ закономерностям, сложившимся на предпрогнозном периоде, их оценку в будущем, учесть положительные и отрицательные последствия. Прогнозы всегда справедливы в рамках логической схемы "если - то", они имеют относительный, условный характер.

Исходя из сказанного, можно определить место получаемых прогнозов - это альтернативные прогнозы, построенные на закономерностях, выявленных в пределах информационной базы. Они полезны в качестве варианта развития при условии некоторой инерционности системы. Кроме того, они незаменимы при исследовании динамики экзогенных показателей и отклонений в эконометрических много-размерных моделях при построении прогнозов и сценарного анализа.

Лекция 8. Динамические модели интервенции

Задача: построить модель внешнего воздействия, изменившего тренд процесса так, что развитие после момента интервенции продолжилось на другом уровне. В теории временных рядов предложено пописывать такую ситуацию с помощью модели интервенции: $Y(t) = N_t + U_t$, где N_t -случайная компонента с нулевым средним, которая может быть белым шумом, или, параметрической моделью авторегрессии и скользящего среднего;

U_t -неслучайная компонента, отражающая воздействие внешнего шока.

В этом случае модель ряда $Y(t)$ можно представить следующим уравнением:

$N_t + \delta_1 N_{t-1} + \dots + \delta_d N_{t-d} = \omega_0 \varepsilon_t + \varpi_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \varpi_l \varepsilon_{t-l} + N_0$, где $\delta_1, \dots, \delta_d$ - коэффициенты авторегрессии, $\varpi_1, \dots, \varpi_l$ - коэффициенты скользящего среднего. ε_t -экзогенная переменная одного из двух типов:

1. Ступень : $\varepsilon_t = 0$, если $t < t_0$ или $\varepsilon_t = 1$, если $t \geq t_0$,

2. Импульс: $\varepsilon_t = 0$, если $t \neq t_0$ или $\varepsilon_t = 1$, если $t = t_0$, где t_0 фиксированный момент времени, называемый моментом интервенции. Величина N_0 - базовый уровень интервенции. В «Эвристе» в моделировании данных предусмотрены различные модели интервенции, построенные для задаваемых параметров. Модель интервенции была впервые предложена Дж. Боксом и Дж. Тяо и предназначалась для анализа внезапных изменений математического ожидания случайного процесса.

Пример. В меню «Моделирование данных» задаем параметры:

I. «АР» -порядок=0,

«СС»-порядок =0,

экзогенная переменная = «ступень».

После выполнения программы появится меню нижнего уровня и потребуется задать параметры:

Длина ряда (100),

Момент интервенции (50),

«СС»(0)=4.($\varpi_0 = 4$)

Выполнить.

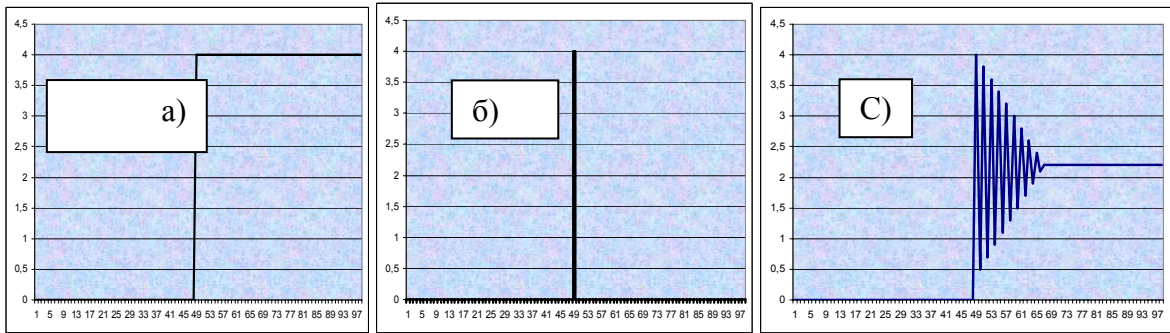


Рис.14 Модели интервенции варианта I: а) – ступень; б) –импульс. Вариант II с)

В случае варианта I значение модели находится на уровне 0 до точки 50, затем перемещается в момент интервенции $t_0=50$ в точку(50, 4) и остается на этом уровне до конца заданного временного интервала. В случае б) (импульс) имеем единственный выброс в точке 50 с высотой, равной 4.

Модель получается следующего вида: $N_t=4 \cdot \varepsilon_t$, $N_t=0$ для $t<50$ и 1 в остальных случаях.

Пример.

II. «АР» -порядок = 1,

«СС»-порядок =0,

экзогенная переменная = «ступень»

Выполнить программу – появится меню нижнего уровня и требуется задать:

Длина ряда (100),

Момент интервенции (50),

«АР»(1)=0.8

«СС»(0)=4.($\sigma_0=4$)

График модели приведен на рис 14,с). Вид полученной модели : $N_t + 0,8N_{t-1} = 4\varepsilon_t$.

$N_t=0$ для $t<50$, в момент $t=50$ началась интервенция и последовательность N_t подпрыгнула на величину «СС»(0) = 4. Дальнейшее ее поведение определяется коэффициентом «АР»(1)=0,8. Колебания носят затухающий характер и стабилизируются на уровне 2,2. Если задать экзогенную переменную «импульс», то колебания реализуются относительно нулевого уровня.

Пример III.

Если выбрать экзогенную переменную «ступень», «АР»(1)=-1, «СС»(1)=1, то получится нулевое значение на интервале от 0 до 49 и далее равномерный рост по прямой Рис.15 (а) .

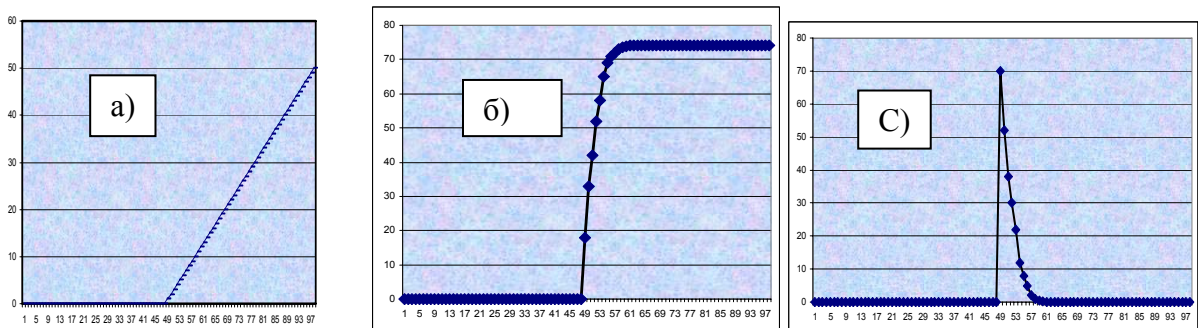


Рис 15. Модели интервенций. Примеры III, IVб и IV с)

Пример.

IV. «АР» -порядок = 1,

«СС»-порядок =0,

экзогенная переменная = «ступень»

Выполнить программу – появится меню нижнего уровня и требуется задать параметры:

Длина ряда (100),

Момент интервенции (50),

«AP»(1)= -0.75

«CC»(0)=20. ($\varpi_0=20$)

«CC»(1)=-1,5.

Результат приведен на рис 15(б) для типа «ступень» и 15(с) для типа «импульс».

Методика применения моделей интервенции показана на примере безработицы в США, представленной рядом ежемесячных данных, взятых с 01. 1948 г по 12.1977 года в десятках тысяч (рис. 16). Ряд дан в приложении к пакету и имеет идентификатор UNEMPLOY.DATA.

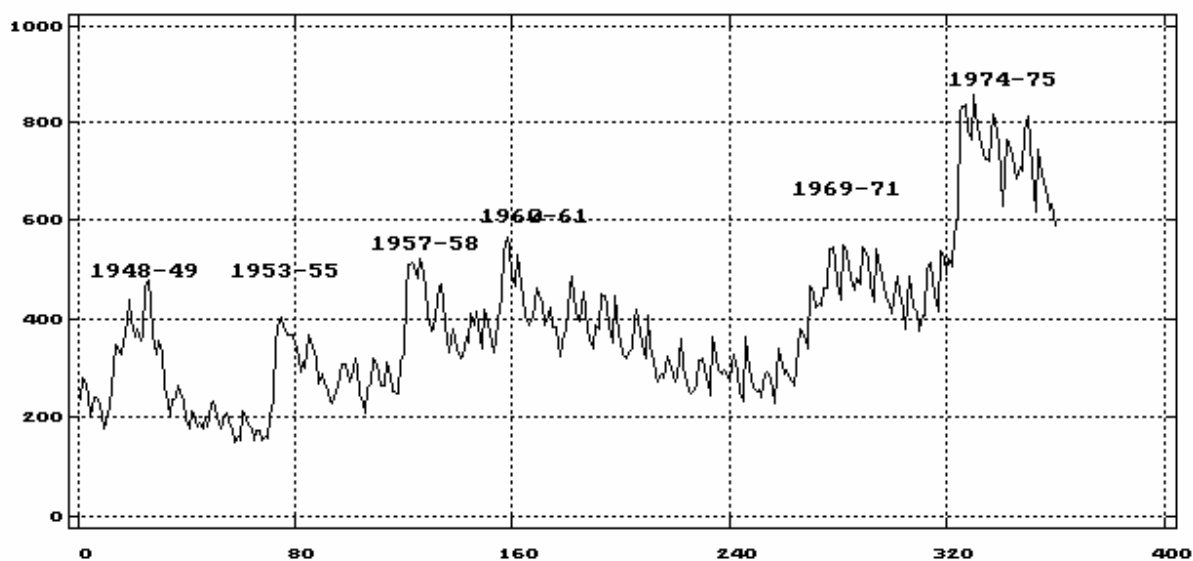


Рис. 16. Ежемесячные данные по численности безработных в США с января 1948 г по декабрь 1977 г.

По графику ряда видно, что у ряда есть тренд среднего. Вероятнее всего есть устойчивая цикличность средней продолжительности. Резкие скачки безработицы отражают развитие кризисов в экономике страны и носят закономерный характер.

Для построения модели такого процесса может хорошо подойти тренд-циклическая модель. Возможно, будут неплохие результаты получены и по двум другим моделям. Но мы последуем за авторами «Эвристики» и покажем методику применения моделей интервенций для устранения ярко выраженных изменений уровня развития процесса, его последующего моделирования и прогнозирования.

Все изменения тенденции развития, а их на графике зафиксировано 6, имеют свое объяснение. Всплеск безработицы 1948-49 года был первым значительным спадом в экономике США после второй мировой войны. Находим самый резкий скачок в наблюдениях – он произошел в январе 1949 г, максимального значения показатель достиг в июле 1949 г и в феврале 1950 г. Построить модель интервенции для первого кризиса мы не сможем, т.к. он приходится почти на начало временного ряда, что не позволяет для моделирования выбрать отрезок достаточной длины.

Второй кризис 1953-1955 гг связан с окончанием войны в Корее, где США воевали 3 года и закончили войну в 1953 г. Сокращение производства и последовавшее снижение занятости сказалось к концу 1953 года. Самый резкий скачок безработицы зафиксирован в декабре 1953 и январе 1954 г. (72-73 наблюдение от начала ряда). Максимум был достигнут в марте 1954 г.

Следующий рост безработицы приходился на 1957-1958 гг. Экономисты отмечают, что после первой мировой войны глубокий спад начался через 11 лет – великая депрессия. К 1957 году прошло 12 лет после второй мировой войны, и спад был обусловлен массовым выбытием оборудования. Кризис не был глубоким и продолжительным, максимальный рост приходился на декабрь-январь (120 и 121 наблюдения), максимум достигнут в июне 1958 г. Затем началось улучшение ситуации, но оно длилось немногим более года, и вновь начался рост безработицы. Этот период был известен как массовый выход на работу женщин, которые до этого предпочитали вести домашнее хозяйство. Добавились последствия забастовки металлургов, и безработица достигла максимального значения за период, превышающий 25 лет. Самый высокий рост приходился вновь на декабрь-январь 1960-1961 гг. (156-157 наблюдение). Максимальное значение показателя было достигнуто в феврале 1961 г.

Далее следовал продолжительный период – около 8 лет снижения безработицы, и он совпал с войной во Вьетнаме. Так США поддерживали свою экономику за счет развязывания войн в других странах. В начале 1970 г на рынок рабочей силы были выброшены 750 тыс. 24-летних ветеранов Вьетнамской войны. Самое высокое значение приходилось на июнь 1975 г.

Последний скачок безработицы на выбранных данных выделяется своим масштабом. Причиной могло стать эмбарго на экспорт, введенное производителями нефти. Более всего пострадали авиационная и автомобильная промышленности. Максимальный рост пришелся на декабрь 1974 г (324 наблюдение) и январь 1975 г., максимальное значение на июнь 1975 г.

Началом кризиса, выраженного в динамике безработицы, будем считать месяц самого быстрого роста показателя. Общие данные приведены в табл. 4.

Таблица 4

Статистические данные для расчета моделей интервенций при моделировании безработицы США с января 1948 г по декабрь 1977 г.

Период кризиса	Начало интервенции	Месяц максимума	Базовый уровень (получен по моделям)	Имитационный период
Годы	Наблюдения	Дата	Тыс. чел	Наблюдения
1953-1955	73	январь 1954г	189,5857	38-93
1957-1958	121	январь 1958 г	203,7195	38-140
1960-1961	157	январь 1961 г	225,1675	80-178
1969-1971	270	июнь 1970 г	292,6071	190-310
1974-1975	325	январь 1974 г	295,087	190-360

При построении модели выделяются следующие этапы:

Поэтапная оценка 5 моделей интервенций для каждого кризиса осуществляется отдельно. Для этого специально предусмотренной программой вырезается отдельный фрагмент ряда (см. в табл. 3 имитационный период) и для него строится модель интервенции. Результат запоминается в виде непосредственно модели и в виде графика смоделированных данных. Выдав на экран расчетную таблицу, мы можем выписать рассчитанное уравнение модели со всеми параметрами и коэффициентами. Это позволяет нам оценить динамику происходивших кризисов. Активизировав ряд рассчитанных модельных результатов, можем определить базовый уровень для каждой модели интервенции. Он приведен в табл. 3

Затем, средствами программы интервенция удаляется из исходного ряда, результат сохраняется под прежним именем и служит исходным рядом для выделения имитационного фрагмента для следующей модели интервенции. Цикл расчетов и сохранение результатов повторяется. Когда будет удалена последняя интервенция, останется ряд, в котором

езде, кроме начала, не будет резкой смены в уровне. Его можно моделировать любыми доступными нам средствами, изучать структуру, рассчитывать прогноз. Так как необходим откорректированный прогноз, предстоит вернуть все интервенции в динамику процесса с полученным прогнозом последовательно в обратном порядке, начиная с последней интервенции. Когда будет вставлена первая интервенция, расчеты можно будет считать законченными.

На этапе, когда построена последняя интервенция, можно выдать на экран графики моделей интервенций. Они приведены на рис. 17.

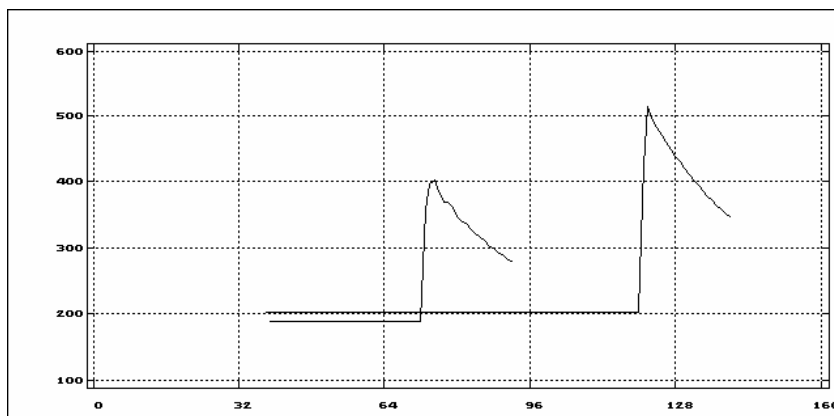


Рис 17. Модели интервенции 1953-1955 и 1957-1958 гг.

Эти модели показывают, что два первых кризиса были очень похожи друг на друга: резкий скачок в момент интервенции (высота равна «СС»(0)), затем начинается монотонное убывание, скорость которого определяется коэффициентом «АР»(1). Обе модели имеют почти одинаковые коэффициенты. Авторы задают справедливый вопрос: не являются ли эти коэффициенты количественным выражением способности системы к восстановлению, характерной для 50-х годов? Возможно, они и правы. У нас есть возможность продлить ряд на 30 лет и просчитать эти параметры для многих случаев и, возможно, получить интересные результаты.

Следующие модели отличаются начальными импульсами, которые вывели систему из состояния покоя и выражены коэффициентами скользящего среднего «СС»(0). Отличаются и базовые уровни этих интервенций (табл. 4).

Таблица 5

Параметры рассчитанных моделей интервенций при построении модели численности безработицы в США с января 1948 г по декабрь 1977 г.

Unempl.int53 55	Unempl.int69 71
Экзогенная переменная – импульс	Экзогенная переменная - степень
"AP"(1)=-0,948	"CC"(0)=176.12
"CC"(0)=166.56	
"CC"(1)=50.46	
"CC"(2)=11.27	
Unempl.int57 58	Unempl.int74 75
Экзогенная переменная – импульс	Экзогенная переменная - импульс
"AP"(1)=-0,958	"AP"(1)=-0,653
"CC"(0)=224.45	"AP"(2)=0,396
"CC"(1)=94.15	"AP"(3)=-0,706
Unempl.int60 61	"CC"(0)=346.41
Экзогенная переменная – импульс	"CC"(1)=129.52
"AP"(1)=-0,995	"CC"(2)=258.97
"AP"(2)=0,779	
"AP"(3)=-0,713	

"CC"(0)=223.09	
"CC"(1)=49.86	
"CC"(2)=147.76	

Для следующих трех интервенций сходство было получено для моделей 60-61 и 74-75. Они близки к первым двум, имеют тип «импульс». Их коэффициенты «АР»(1) отрицательны и велики по абсолютному значению. Но выход из кризиса для них проходил более сложно - обе модели имеют авторегрессию третьего порядка и их коэффициенты имеют чередующиеся знаки, что сопровождалось локальными скачками функции интервенции на этапах оздоровления экономики.

Для кризиса 69-71 была получена ступень, что означало, что произошел скачок среднего значения процесса на новый уровень, и фазы восстановления системы до следующего кризиса не было.

Ряд после удаления интервенций требуется подвергнуть анализу. Прежде чем строить его модель в блоке «Параметрический анализ», было полезно выполнить программу «идентификация» с расчетом автокорреляционной функции для нашего ряда остатков. Всплески в ее гистограмме указывали на присутствие в динамике ряда сезонной компоненты с периодом 12 месяцев.

Выделим сезонную компоненту, зайдя в блоке «предварительный анализ» в программу «сезонная компонента» и получим график выделенной компоненты (рис. 18).

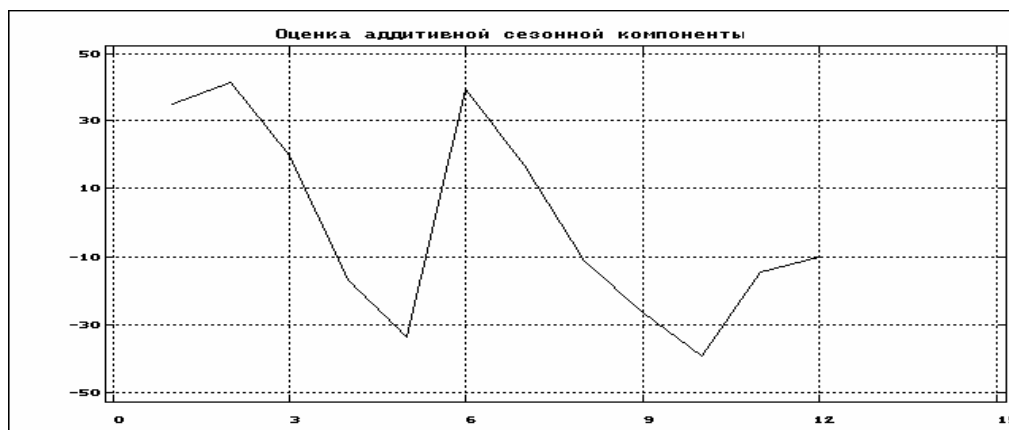


Рис 18. Сезонная компонента в динамике численности безработных в США

Мы получили редкую возможность оценить усредненную по годам динамику сезонной компоненты. Из графика следует, что с высокой вероятностью безработица ежегодно увеличивается в январе (рис.18), затем снижается до мая месяца и, когда заканчиваются весенние работы, происходит массовое увольнение к лету. Затем безработица вторично снижается до октября, начиная новый рост в ноябре, продолжающийся до февраля следующего года. Наибольший рост приходится на январь, и высокий уровень показателя поддерживается в феврале. По всей видимости, большую долю составляют сезонные рабочие, привлекаемые к весенним и осенним сельхозработам. Интересно, что эти месяцы упоминаются в качестве начала интервенций во всех кризисах, кроме предпоследнего.

Удаление из ряда остатков сезонной компоненты позволяет получить стационарный процесс (рис. 19), который достаточно легко моделируется АРСС моделью.

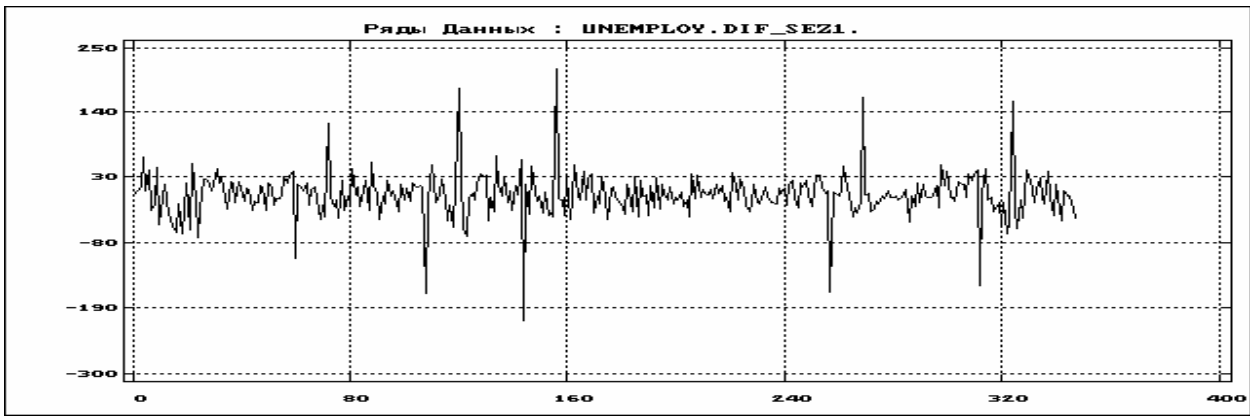


Рис.19

На графике видим, что в динамике сохранились достаточно регулярные всплески показателя. Его спектр (рис.20) подтверждает гипотезу и сложной структуре процесса.

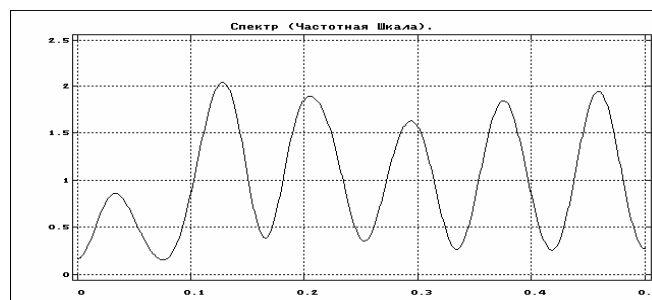


Рис.20. Спектральная функция численности безработных после удаления интервенций и сезонной компоненты

В блоке «Непараметрический спектр» программа «сглаженная периодограмма, периодическая шкала» позволяет получить спектральную плотность (рис. 20), всплески в которой указывают на наличие в процессе периодических составляющих с периодами 8 месяцев и 30 месяцев и набором важных быстрых частот. Гармоника с периодом 30 месяцев, что соответствует 2,5 годам, является реакцией на длительные всплески, которые мы видим на графике рис. 19.



Рис.21 Модель численности безработных в США с января 1948 г по декабрь 1977 г. и прогноз на 1978 г.

Однако строить модель мы будем для ряда остатков с сезонной компонентой, так как в пакете предусмотрено построение моделей авторегрессии и скользящего среднего с сезонной авторегрессией.

Построенная модель (ряд 1 на рис 21) позволила рассчитать прогноз на 12 месяцев в блоке «Прогнозирование САРСС моделей» и последовательно добавляя интервенции, получить окончательный смоделированный ряд с прогнозом (ряд 2 на рис 21).

Последующее сравнение с фактическим показателем показало, что модель полностью воспроизвела на прогнозном периоде точки поворота с небольшими отклонениями от факта.

Гармонические модели.

Отдельный класс моделей представляют Гармонические модели. В их основе лежит принципиально другая методология моделирования – итерационный отбор композиции гармоник по методу Байеса, обеспечивающих наилучшее приближение: $Y_t = C + \sum_{i=1}^m (\alpha_i \cos(\varphi_i t) + \beta_i \sin(\varphi_i t))$ с параметрами $C, \alpha_i, \beta_i, \varphi_i$. Для рядов с трендом в

дисперсии предусмотрена модель с распадом: $Y_t = \sum_{i=1}^m [\alpha_i \cos(\varphi_i t) + \beta_i \sin(\varphi_i t)] e^{-p_i t}$. В этих моделях m - количество гармоник задается пользователем в интервале от 1 до 10 и называется размерностью модели.

На экран можно вывести исходный ряд и график подогнанной модели, спектр мощности, остатки, полученные вычитанием из данных значений подогнанной модели. Модель можно вывести в виде расчетной таблицы.

На практике нужно определиться только с размерностью модели. Рекомендуется в режиме вывода на экран ряда данных и подогнанной модели провести серию расчетов оценки модели для различных m , начиная с наименьшего. Для выбранного варианта необходимо вывести на экран расчетную таблицу с текстом модели и сравнить ее структуру со структурой тренд-циклической модели. На рис. 22 приведены ряд и подогнанные модели порядков 5 и 8.

На первый взгляд модель размерности 8 удовлетворительно описывает динамику ряда и должна бы дать неплохой прогноз. Но расчеты прогноза показали низкие прогнозные качества этой подобранной модели. Модель размерности 5 не содержит достаточной информации для прогнозирования, так как быстрые частоты остались не охваченными.

К достоинствам этого метода стоит отнести возможность строить модели нестационарных процессов без предварительной оценки трендов или фильтрации рядов. Моделирование тенденции роста среднего в данных моделях обеспечивается подбором периодической составляющей с большим периодом, значительно превосходящим длину ряда.

Второй неоспоримый плюс этих моделей – удобство использования и высокая скорость расчета как модели, так и прогнозов по ней.

Но гармонические модели имеют серьезные недостатки:

1. Не оцениваются статистики, позволяющие провести сравнение моделей различной размерности. В таблице выдаются только доверительные интервалы рассчитываемых параметров.
2. С ростом размерности модели возможно изменение периодов у всех аргументов, что делает неразрешимой в рамках только этой модели задачу оценки структуры процесса и ранжирования циклических составляющих по их роли в формировании показателя.

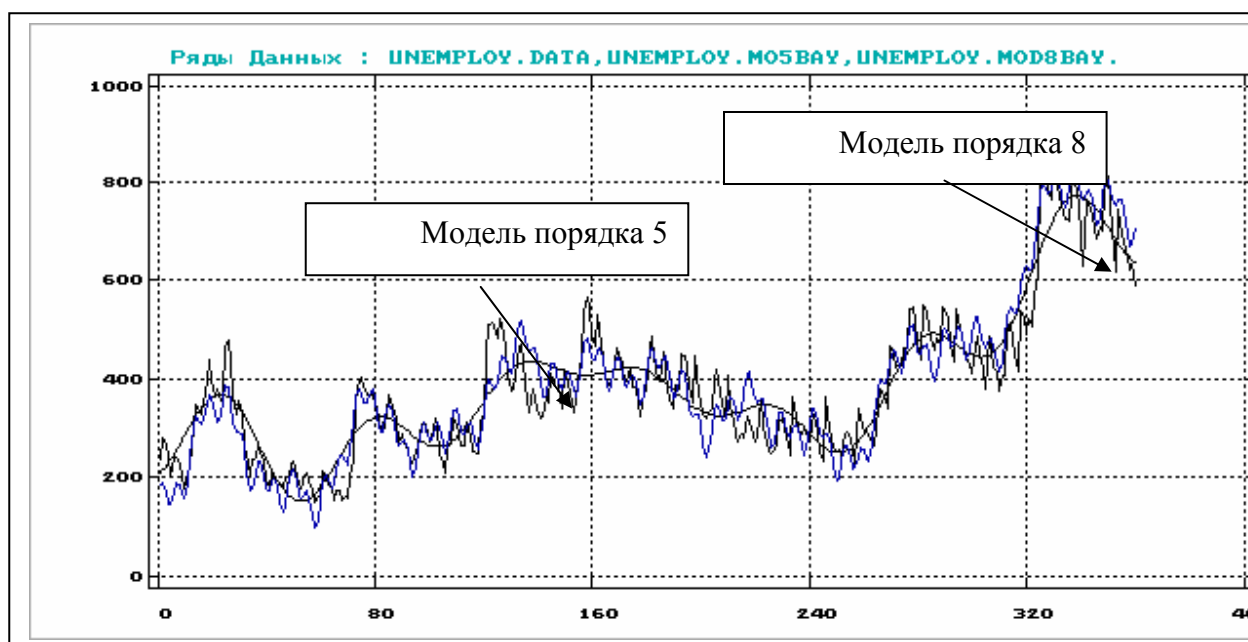


Рис. 22. Гармонические модели порядка 5 и порядка 8 для численности безработных в США

В заключение необходимо отметить, что в комплексе с первыми двумя моделями гармонические модели могут быть в высшей степени полезны. Если регулярно требуется оценивать один и тот же процесс, о котором накоплена значительная информации качественного и структурного характера, то гармоническая модель позволяет с минимальными затратами пересчитывать прогнозы. Например, она может быть полезна для игры на бирже.

Лекция 9. Курс рубля на российском рынке. Динамика и моделирование

Модель - это только инструмент исследований. Последнее слово за экспертом, в руках которого этот прекрасный инструмент.

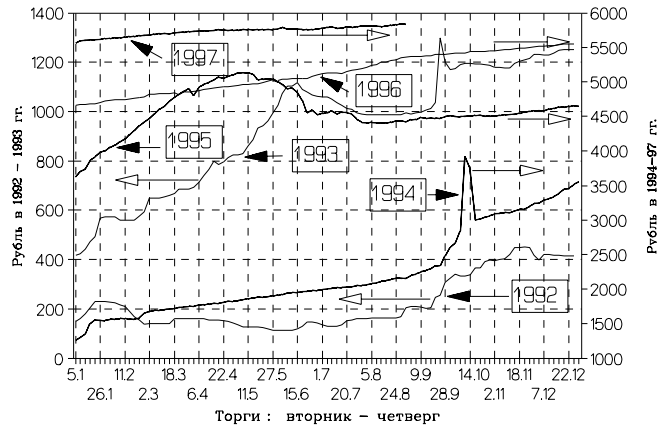
Российский финансовый рынок за период 1992-1997 гг. превратился в важнейший динамично меняющийся сектор экономики: рост активов, образование новых сегментов и инструментов финансового рынка; крупные структурные изменения: сократилась доля валютного рынка, возросла роль рынка государственных ценных бумаг (ГКО, ОФЗ), получили развитие рынки корпоративных ценных бумаг и межбанковских кредитов. Доля биржевого валютного рынка уже к концу 1995 г. опустилась с 70-80% до 20% общего объема операций на денежном рынке России¹, возник межбанковский валютный рынок. Что представлял в тот период курс рубля к доллару США для российского рынка - один из важнейших индикаторов или его влияние было ничтожно мало?

На графиках рис. 9.1 отчетливо видно ежегодное сезонное резкое падение курса в сентябре-октябре в течении первых 3 лет: с 1992 по 1994г. и определяющее действие валютного коридора, введенного с июля 1995г.(графики по годам приведены в масштабах 2-х осей, что позволило сопоставить их годовую динамику).

До введения валютного коридора в условиях практически рыночного режима работы валютного российского рынка (единственной серьезной регулирующей мерой были интервенции Центрального банка) курс формировался под воздействием трех групп факторов.

¹ 1. Доронин И. Валютно-финансовый рынок России в 1995 г. Внешняя торговля, 1995

Рис. 1. Курс руб/долл. на ММВБ
январь – декабрь 1992–1997 гг.



На рисунке 9.1 по годам приведена динамика биржевого курса рубля к доллару США с момента начала торгов на ММВБ: с 1992 г.

1. Механизм торгов. В 1992 г. уровень курса определялся объемом текущих долларовых продаж, спросом, предложением и лаговым объемом продаж месячной давности:

$K = f(V, S, P, V_{-8})$; $dK = f(P-S, S, V_{-3})$; Определяющими среди них были спрос и разность между спросом и предложением на текущих торгах.

В 1993-1994 гг. на уровень курса влиял текущий объем продаж и разность предложения и спроса:

$K=f(v, P-S)$, $dK=f(P-S, V, P)$, где dK - приросты ряда.

Биржевой механизм стал работать более четко к концу периода. **Многовариантный анализ лаговых связей показал, что разность предложения и спроса влияет на прирост курса только на текущих торгах!**

2. Из внешних индикаторов наибольшее влияние на изменения курса оказывали кредитные вложения, сбережения населения (их рост вызывал падение рубля) и динамика экспорта, долларовые поступления от которого вызывали “удорожание” рубля.

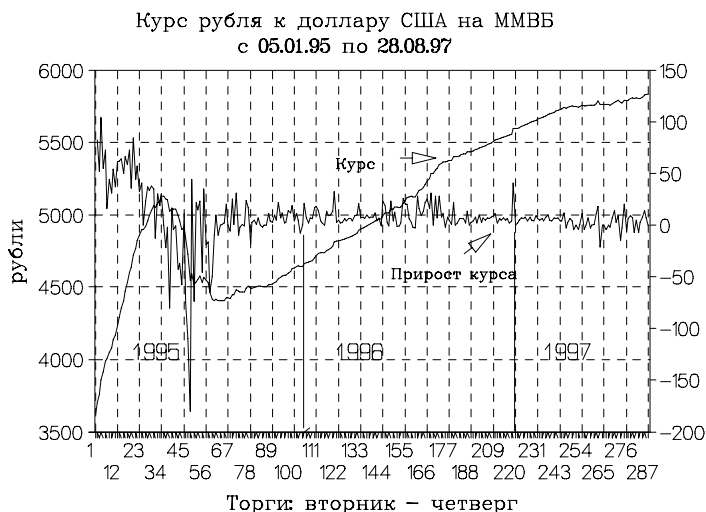
Влияние внешней торговли проявлялось в движении курса в виде циклических подъемов с периодом в 1 и 2 месяца (цикл обслуживания внешнеторговых сделок). Была выявлена также четкая периодичность в 5 торгов, что связано с недельным ритмом работы биржи.

3. Политические факторы и меры правительства, как правило, вызывали катастрофу в динамике курса и требовали особых подходов для моделирования. Но именно в этот период было обнаружено, что в изменениях курса рубля к доллару США присутствуют устойчивые в среднем закономерности, что позволяло строить интересные модели и получать достоверные предсказания этих политических моментов “интервенции” - перехода на другой уровень показателя. Объем статьи не позволяет подробнее остановиться на анализе влияния политических и экономических решений на динамику курса рубля к доллару. Однако многовариантное построение EX-POST прогнозов для различных временных интервалов показало, что в большинстве случаев политические события, выпуск денег в обращение или действия Центробанка были предсказуемы и лишь увеличивали “закономерное” падение курса. Это объяснялось тем, что с начала реформ до середины 1995г меры правительства принимались по определенному сценарию и повторяли прошлое по спирали, все более раскачивая динамику курса.

Начало лета 1995 г. предвещало, как и в предшествующие годы, очередной катастрофический обвал курса осенью. Однако наступил “коридорный” этап.

После введения валютного коридора развитие курса рубля к доллару стало иметь принципиально иной характер (рис.1).

В 1995 г. усилилось государственное регулирование, включающее помимо введения ограничений на курс, снижение государственных эмиссий, рост активности государства по расширению альтернативных сегментов финансового рынка. К моменту введения валютного коридора уже действовали рынки ГКО, официальных ценных бумаг (ОФЗ), внебиржевой валютный рынок. Свободный финансовый капитал переместился с торгов валютных бирж в другие сектора рынка, был остановлен рост денежной массы, что вместе взятое принципиально изменило экономическое воздействие на курс рубля к доллару и динамику объемов продаж на ММВБ.



Сегодня мы уже можем проследить движение курса внутри валютного коридора и попытаться обобщить сложившийся новый механизм взаимодействия денежных потоков. На рисунке 2 отчетливо видно, что с 24 августа 1995г по 12 сентября 1996 г. сохранялся постоянный темп, который составлял 14.84 рубля в неделю. Далее до 27 марта 1997 г. темп был равным 12.7 рубля в неделю. С начала апреля и до конца августа 1997г. он опустился на уровень 4.82 рубля в неделю. С июня 1997 г. курс рубля к доллару флуктуирует относительно кривой, асимптотически приближающейся к горизонтали, но увеличился разброс колебаний курса до 30-40 рублей за неделю. Можно высказать гипотезу, что общая тенденция в динамике курса определяется из - вне механизма финансовой системы и предсказать ее можно только на основе анализа политических и регулирующих факторов.

Что же дал экономико-статистический анализ?

Падение курса в рамках “коридора” искусственно занижалось на фоне продолжавшегося спада экономики, вследствие чего рубль дорожал относительно доллара. По оценке А.С. Торгашева (“АВАЛЬ” 2.1997г.стр 19-22) за 1992-1996 гг. доллар обесценился в 30 раз. По данным журнала “Финансы в Сибири” доллар обесценился, но значительно меньше. Так, за 1996 г. покупательная способность доллара на потребительском рынке составила 98.3% от уровня 1995г. Сокращение доходности долларовых валютных операций на ММВБ повлекло перевод финансов в другие сектора рынка. Стал интенсивно расти рынок ГКО-ОФЗ, межбанковских кредитов, повысился спрос на немецкую марку. Валютные сделки переместились на зарождавшийся межбанковский рынок.

Так, объемы продаж (в трлн. руб.), взятые за полугодие, на указанных рынках соотносились:

	1995(II)	1996(I)	1996(II)	1997(I)
МБК	80	67	195	209
ГКО-ОФЗ	140	275	402	275
ММВБ	42	19	6	3

В результате курс рубля к доллару замедляет свое падение: с января по август 1995г на 799 руб., за этот же период 1996г - на 696 руб., а в 1997 г. лишь на 277 рублей.

Возникает вопрос, связан ли курс рубля к доллару в условиях валютного коридора с другими финансовыми индикаторами. Какие из них являются определяющими. Каковы тенденции их развития? Как формируется их динамика и что в ней общего и уникального? Нами обнаружено, что после изменения финансовой политики в середине 1995г начинает складываться новая система взаимовлияния факторов финансового рынка. Ее становление хорошо видно, если рассматривать рынок за период в целом и поэтапно на полугодовых интервалах (табл.1).

Средние за период недельные значения отдельных показателей финансового рынка в России (обороты в млрд руб.)
Таблица 1

Индикаторы	18.06.1995 - 27.12.1995г.	28.12.1995 - 17.07.1996 г.	8.07.1996 по 1.01.1997 г.	2.1.1997 по 23.4.1997 г.	01.01.1996 - 23.04.1997 г	8.06.1995 - 23.4.1997 г
	II	I	II	I	III	IV
1. Темп инфляции, %	1.05	0.5	0.2	0.4	0.39	0.588
2. Оборот МБК	2752.6	2381	8110	13052	6870	5652
3. Темп роста ГКО	1.2	2.3	0.97	0.56	1.45	1.37
4. Оборот ГКО-ОФЗ	4827	9808	16733	17202	13977	11270
5. Курс руб./долл.	4522	4886	5406	5675	5253	5037
6. Оборот на ММВБ	1449	674	246	208	414	720
7. Курс руб/марка	3190	3272	3579	3409	3413	3347

Средний за полугодие недельный уровень инфляции после устойчивого полугодового снижения (до 0.2%) вновь увеличился в первой половине 1997г. В этом же полугодии происходят самые значительные кредитования в среднем за неделю (13трлн руб., самые значительные обороты в среднем за неделю на рынке ГКО-ОФЗ - свыше 17 трлн. руб. Объемы продаж на ММВБ в условиях дешевого доллара продолжали стабильно снижаться и сократились более чем в 7 раз: с 1,5 трлн. руб. до 0.2 трлн.руб. Движение денежных потоков на российском рынке включает такой важный растущий сектор, как межбанковский валютный рынок. Однако межбанковский курс рубля к доллару близко воспроизводит изменения курса ММВБ ($r=0.994$). Его среднее значение за весь период составило 5039.2, что всего на 2 рубля превысило среднее значение курса рубля к доллару на ММВБ (см. Таб.1). Высокая идентичность динамики обусловила исключение из рассмотрения межбанковский курс. Интерес представляют объемы продаж на межбанковском рынке, что было недоступно из-за отсутствия информации.

Нами было обнаружено, что взаимовлияние показателей менялось на противоположное от полугодия к полугодию.

Так, в первой половине года рост межбанковских кредитов устойчиво сопровождался снижением темпа инфляции и наоборот, сокращению кредитования соответствовало ускорение роста инфляции ($r=-0.6$ в 1996г, и $r=-0.8$ в 1997г). Во второй половине года - рост и падение этих показателей происходили одновременно, и была получена положительная зависимость ($r=0.5$ в 1995г., $r=0.4$ в 1996г.). При этом положительные коэффициенты корреляции уменьшались со временем, а отрицательные возрастали. Если сравнить графики этих показателей, то можно сделать вывод, что такая смена знака связана с синхронностью и асинхронностью колебаний и в меньшей степени с изменением общей тенденции развития.

Корреляция темпа инфляции с факторами: курсом рубля к доллару США, объемом продаж на ММВБ и курсом рубля к DM также различалась знаком для первой и второй половины года. Степень зависимости возрастала от полугодия к полугодию и уже к лету 1997 г. темп инфляции стал статистически зависим от всех рассматриваемых факторов.

В целом же за 2-х летний период (вторая половина 1995-первая половина 1997г.) темп инфляции обнаружил отрицательную связь с объемами межбанковских кредитов ($r=-0.4$), с объемами продаж на рынке ГКО-ОФЗ ($r=-0.7$), с динамикой курса рубля к доллару США на ММВБ ($r=-0.7$), и курса рубля к немецкой марке ($r=-0.6$). Снижение объемов продаж на ММВБ, характерное для периода в целом, сопровождалось снижением темпа инфляции, хотя реальная зависимость между ними, особенно к концу периода вряд ли была значимой (см. в таб.1 падение объемов продаж на ММВБ.). Слишком малы были объемы продаж на ММВБ, чтобы влиять на темп инфляции.

Их снижение происходило на фоне роста объемов продаж на рынке ГКО-ОФЗ, и увеличения объемов межбанковских кредитов, снижения курсов рубля к доллару США и DM (немецкой марке), что и отразили соответствующие значимые отрицательные коэффициенты корреляции.

Со второй половины 1995 г. этот показатель терял свое влияние и уже к концу 1996 г. оборот на ММВБ не играл никакой роли на финансовом рынке. Однако в первой половине 1997 г. объемы продаж валюты на ММВБ вновь стали коррелировать с финансовыми индикаторами: с темпом инфляции коэффициент составил 0.7; с курсом рубля к DM - $r=0.5$; с объемами межбанковских кредитов и объемами продаж ГКО-ОФЗ получена отрицательная связь ($r=-0.56$) и ($r=-0.6$), что соответствовало теоретическим представлениям.

За рассматриваемый период заметно активизировались торги по марке.

Курс рубля к немецкой марке на всем периоде (1995-1997гг) был связан положительной корреляционной связью не только с курсом рубля к доллару, но и с объемами продаж на рынке ГКО-ОФЗ, и объемами межбанковских кредитов и отрицательной связью с темпом инфляции и объемами долларовых продаж на ММВБ.

Связь между показателями можно отследить на структурном уровне. Так, темп инфляции, МБК, и рынок ГКО-ОФЗ содержали однопериодные составляющие длительностью 34 недели. Периодичность в 34 недели можно объяснить деловой активностью, ежегодно повышающейся после начала года к концу весны и затухающей к середине августа. Курс рубля к доллару, темп инфляции и объемы МБК содержали периодичность в 8 недель (2 месяца - возможно влияние внешней торговли). Курс рубля и марки имели однопериодную составляющую в 32 недели, но она играла незначительную роль в формировании их флуктуаций; кроме нее они содержали важную общую составляющую длительностью 53 недели (годовая динамика!), что их объединяло с объемом продаж на ММВБ. Интересно, что курс рубля к DM связан наличием 9-недельной зависимости с рынком ГКО-ОФЗ. Объемы межбанковских кредитов, рынок ГКО-ОФЗ содержали составляющую с периодом около 5 недель.

Что же происходило в это период с курсом рубля к доллару? Во второй половине 1995 г. после введения с июля месяца валютного коридора V7 коррелировал только с курсом рубля к немецкой марке (0.63).

В первой половине 1996г начинают работать механизмы влияния официальной цены доллара на банковском рынке: в этот период корреляция с темпом инфляции составляла ($r=-0.86$), с оборотом МБК с ($r=0.78$), с немецкой маркой ($r=0.65$).

Во второй половине 1996 года связь с темпом инфляции становится положительной (0.6), сохраняется высокая положительная связь с объемами продаж по МБК (0.73), с курсом к немецкой марке (0.55), появляется положительная зависимость (0.57) с оборотом на рынке ГКО-ОФЗ.

Весной 1997 года ситуация меняется. Зависимость от темпа инфляции становится отрицательной как и весной 1996 года, сохраняется положительная связь с оборотом на МБК(0.78), В отличие от 1996г сохраняется положительная значимая связь с объемами продаж ГКО-ОФЗ, и неожиданно на курс доллара стал отрицательно воздействовать курс немецкой марки(-0.74).

Для всего 2-х летнего периода в целом самая высокая **положительная** зависимость курса руб./дол. проявилась с объемами продаж на рынке ГКО-ОФЗ (0.89); с объемом межбанковских кредитов (0.83) и курсом рубля к немецкой марке (0.78). Высокая отрицательная зависимость обнаружена с темпом инфляции (-0.7) и объемами продаж на ММВБ (-0.57).

Рассматривая последовательно все факторы по степени их влияния на курс рубля к доллару (на основании оценок частных корреляций), получили следующее регрессионное уравнение, отражающее сложившиеся за период взаимосвязи:

$$\text{руб./дол.} = 2806.16 + 0.22*(\text{ГКО-ОФЗ}) + 0.04*(\text{МБК}) + 0.56*DM - 225.5*(\text{Т.И.}) \quad (1)$$

(4.2) (8.4) (4.4) (4.4)

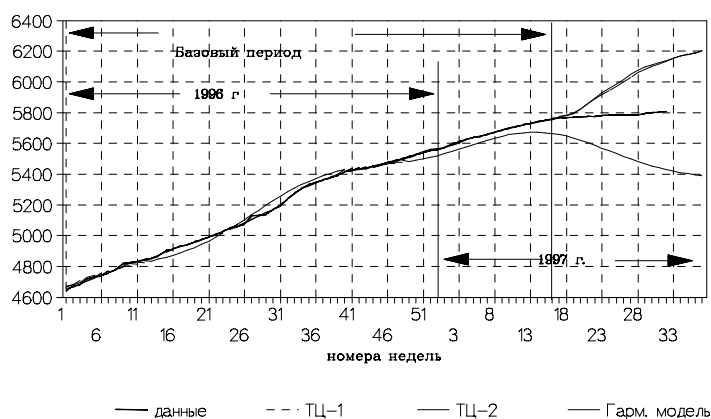
$$R=0.912 \quad S=134.3 \quad F=242 \quad \text{Signif } F=0.0000$$

Правая часть на 91% объясняет изменения курса рубля к доллару.

Несмотря на полученные результаты, несколько изменившие первые представления о роли на финансовом рынке курса руб./дол. в условиях коридора, совершенно неожиданными были результаты факторного анализа. Он показал, что вся совокупность показателей может быть описана единственным фактором, объясняющим 61% изменений совокупности и при этом **главным структурообразующим представителем совокупности является курс рубля к доллару!** Вторым по весу оказался объем продаж на рынке ГКО-ОФЗ, далее в соответствии с убыванием факторных нагрузок с отрицательными знаками шли темп инфляции, курс рубля к марке и объемы МБК.

Динамика курса рубля к доллару, также как и средняя тенденция объемов межбанковских кредитов, более всего похожа на логистическую кривую, асимптотически приближающуюся к уровню 6 тыс. руб. за доллар. Начиная с весны 1997г курс меняется очень медленно. В целом за май - август 1997г он упал всего на 114 рублей. Применяемые в работе способы не подходят для моделирования такой динамики. Тренд-циклическая модель воспроизводила 100% изменения показателя ($R^2=1$, $DW=1.15$ и $S=7.69$), однако ЕХ-post прогноз оказался завышен и также плох, как и слишком заниженный прогноз, полученный с оптимизацией Байеса по гармонической модели.

Прогнозы курса рубля к доллару на ММВБ
(период 1.01.96-23.04.97)



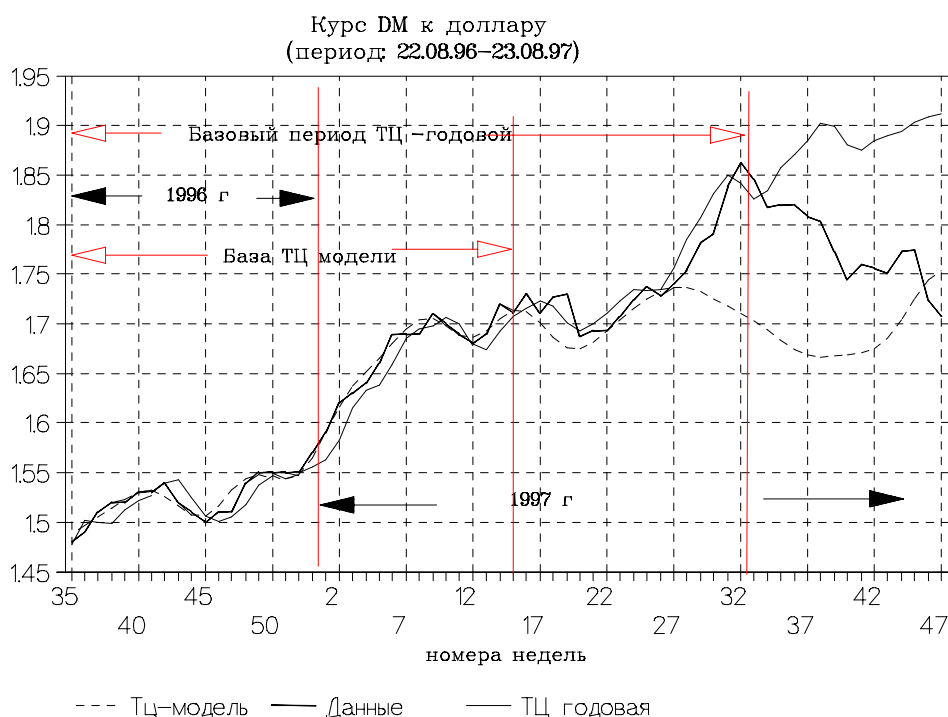
Модель, рассчитанная на базе предшествующего года, предсказала дальнейшее падение рубля с темпом, присущим падению в 1996г. По ее прогнозу 6000 – й уровень курса должен быть достигнут во второй половине ноября. Начало следующей стагнации на уровне 6200 руб. за доллар модель предсказала на март 1988г.

Падение рубля очень вероятно, т.к. крепнувший рубль не был подтвержден новой товарной массой, снижение покупательной способности доллара на внутреннем рынке отрицательно воздействовало на экспорт. Кроме того, снижение темпа роста доходности ГКО, начиная со второй половины 1996 г., давно предвещало структурные изменения на финансовом рынке.

Прогнозы **объемов продаж на ММВБ** были получены с учетом тенденции спада и в перспективе уходили в отрицательную область. Они указали на то, что если не изменятся условия, то на ММВБ долларовые торги должны будут прекратиться.

Курс рубля к доллару на российском рынке все более подвержен влиянию мирового валютного рынка. Основным проводником этого воздействия является немецкая марка.

Было построено для всех курсов валют европейского валютного рынка две модели: на интервале с 1.01.96 года по 23 апреля и годовой базе: с августа 1996 по август 1997гг). Годовые модели позволили получить более точный ex-рост прогноз.

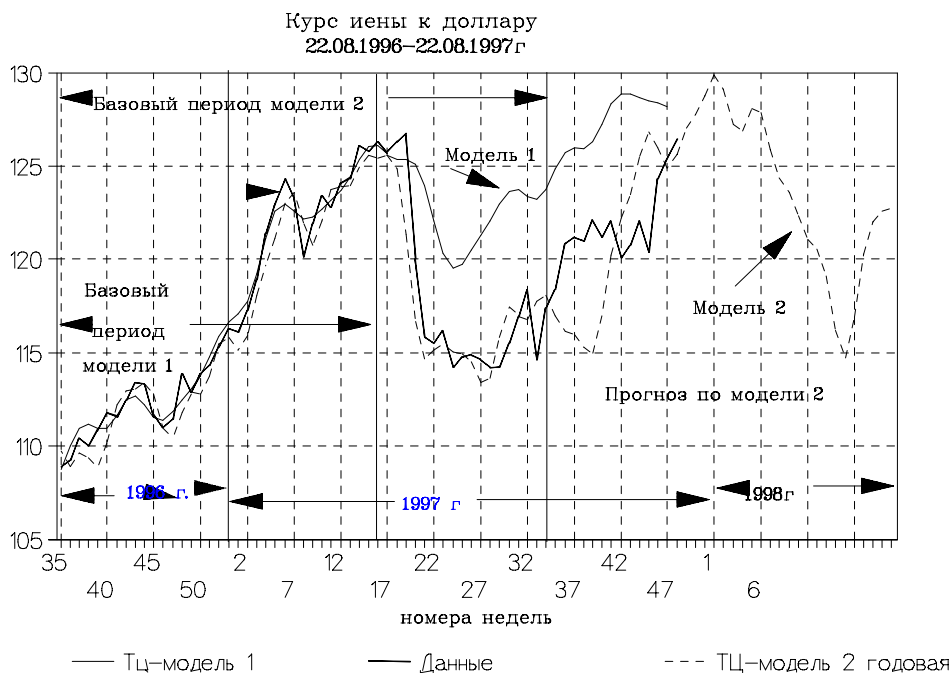


Следует отметить, что для DM на 41 неделю - начало октября - оба прогноза предсказывали смену тенденции к понижению курса марки.

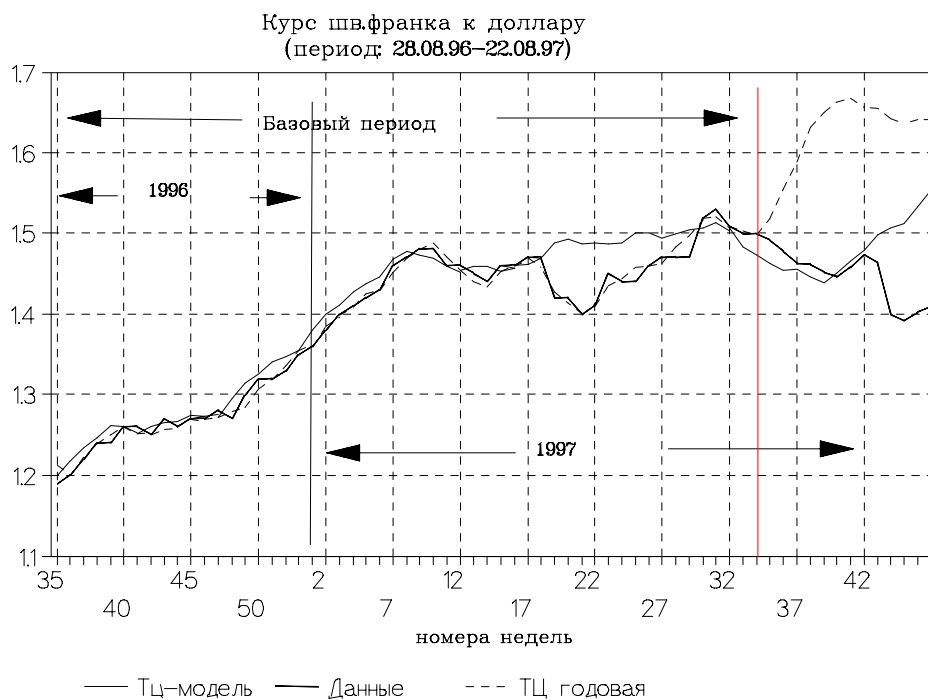
Для курса доллара США к английскому фунту годовая модель точно воспроизвела последующие два месяца и предсказала точку смены роста на падение в конце периода на 33-34 неделе.



Для японской иены (V13) первая модель предсказала основные моменты смены тенденции, но на очень заниженном уровне. Вторая модель (ТЦ годовая) была более точной на отрезке в 2 последующих месяца. Далее и она предсказывает падение иены в декабре до самого низкого уровня за период.



Для швейцарского франка ТЦ - модель не смогла предсказать рост франка с 19 недели 1997г. При этом она предсказывает рост после 31 недели вплоть до 39 недели. Совершенно не понятно поведение годовой модели, предсказывающей резкое падение на длительный период до 41 недели.



В структуре построенных моделей на базе 1996-1997гг выделяются следующие важные общности. Так, курс немецкой марки к доллару содержит определяющую составляющую с периодом 20 и 9 недель, что совпадает со структурой курса рубля к DM на ММВБ.

20-недельная динамика была выявлена в курсе швейцарского банка, 22 недели в динамике английского фунта. DM, английский фунт и швейцарский франк объединяет периодические колебания длительностью 5-6 недель. Структура курса иены сильно отличается от структуры марки и фунта. Она более синхронна с колебаниями швейцарского франка. У них общими оказались периоды в 53 недели, 16 и 12 недель, в остальном структуры сильно различаются. Следует заметить, что на соответствующей базе в динамике российских показателей двух последних гармоник не встречалось.

На всей базе 1995-1997 года было получено следующее уравнение:

$$V7 = -4145.6 + 0.0064 * V6 + 1.345 * V9 + 3050.9 * V11$$

(3.08) (25) (31)

$$R^2 = 0.98 \quad S = 53.08 \quad F = 2236.9 \quad \text{Signif } F = 0.000$$

Таким образом, определяющим оказывается рынок ГКО-ОФЗ, затем был включен в уравнение (а включение идет на основе частных корреляций) курс рубля к DM на ММВБ и курс DM к доллару на европейском валютном рынке.

Получено:

1. Представителем финансового рынка России является курс рубля к доллару. Его динамика формируется под воздействием рынка ГКО-ОФЗ, МБК, курса рубля к DM, темпа инфляции и курса DM к доллару. На курс влияет объем продаж на ММВБ и механизм торгов.

2. Применение ТЦ-модели позволяет глубоко изучать структуру процессов и получать интересные для исследователей прогнозы динамики валютных индикаторов. Полученные прогнозы и результаты взаимодействия финансовых индикаторов представляет практическую ценность для участников финансового рынка. Как наиболее яркий пример можно рассматривать успешный прогноз падения японской иены в конце года и динамику доллара относительно английского фунта.

3. Статистические прогнозы российских финансовых индикаторов оказались в значительной степени справедливы и заслуживают серьезного внимания как исследователей, так и практиков.

3. Российский рынок испытывает возрастающее прямое воздействие мирового валютного рынка. С другой стороны, российские банки стали активными участниками торгов на европейском валютном рынке и его состояние и перспективы представляют интерес для финансового мира.

Литература

1. Абрамов И.М. Циклы в развитии экономики СССР. - Минск: Наука и техника, 1990.
2. Аллен Р. Математическая экономия. - М.: ИЛ, 1963.
3. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. - М.: Мир, 1976.
4. Анчишкин А.И. Наука - техника - экономика. - М.: Экономика, 1986.
5. Баллоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. - М.: Советское радио, 1969.
6. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. - М.: Мир, 1974.
7. Болч Б., Хуань К.Дж. Многомерные статистические методы для экономики. - М.: Статистика, 1979.
8. Бриллинджер Д. Временные ряды. Обработка данных и теория. - М.: Мир, 1980.
9. Венцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1969.
10. Винер Н. Нелинейные задачи в теории случайных процессов - М: ИЛ, 1961.
11. Винер Н. Теория предсказания, современная математика для инженеров, - М.: ИЛ, 1958.
12. Гренжер К., Хатанака М. Спектральный анализ временных рядов в экономике. - М.: Статистика, 1972.
13. Дженкинс Г., Ватте Д. Спектральный анализ и его приложения. Вып. 1.- М.: Мир, 1971.
14. Ермилов А.П. Механизм инвестиционного цикла. - Новосибирск: Наука, Сиб. отделение, 1986.
15. Журбенко И.Г. Анализ стационарных и однородных случайных систем. - М.: Изд-во МГУ, 1987.
16. Журбенко И.Г. Спектральный анализ временных рядов. - М.: Изд-во МГУ, 1982.
17. Ибрагимов И.А., Розанов Ю.А. Гауссовские случайные процессы. - М.: Наука, 1970.
18. Кагаловский К.Г. Экономический кризис. Где искать выход? //Коммунист.-1990.- N 4.
19. Клименко Л.А. Применение спектрального анализа для изучения периодических колебаний капиталистической экономики / /Экономика и математические методы.- 1972 - т. VIII, вып.6.
20. Клименко Л.А., Грицевич И.Г. Статистические методы анализа. Алгоритмы и программы. Вып. 1 и 2. - М.: Изд-во ИМЭМО, 1977.
21. Ковалева Г.Д. Анализ циклических характеристик экономических процессов с помощью кросс-спектрального анализа // Моделирование и прогнозирование циклического воспроизводства/ИЭиОПП СО АН СССР. -Новосибирск, 1984.
22. Ковалева Г.Д. Динамика спектральных оценок нестационарных экономических рядов //Первый всемирный конгресс Общества математической статистики и теории вероятностей им. Бернулли. Тезисы, Т. 1. - М.: Наука, 1986.
23. Ковалева Г.Д. Количественные методы выявления длинных волн//Длинные волны. Научно-технический прогресс и социально-экономическое развитие. Гл.5.1-5.2. - Новосибирск: Наука, Сиб. отделение, 1990.

24. Ковалева Г.Д. Применение спектрального анализа для исследования некоторых статистических показателей экономики США //Проблемы моделирования капиталистической экономики/ ИЭиОПП СО АН СССР. - Новосибирск, 1981.
25. Ковалева Г.Д. Сибирская составляющая в российской валюте//Финансы в Сибири.- 1997.-N5/43
26. Ковалева Г.Д., Ягольницер М.А.Типизация периодического производственного процесса методами спектрального анализа //Статистическое моделирование экономических процессов. - Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1991.
27. Кондратьев Н.Д. Большие циклы конъюнктуры и теория предвидения. М.: Экономика, 2002.
28. Кузык Б.Н., В.И.Кушлин, Ю.В.Яковец Прогнозирование, стратегическое планирование и национальное программирование. - М.: Изд-во Экономика, 2008

канд экон. наук, доц. Галина Даниловна Ковалева

**ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ В
ЭКОНОМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ**

Курс лекций

Подписано в печать
Формат 60x84 1/8. Офсетная печать.
Уч.- изд. л. 6. Тираж экз.
Заказ №

Редакционно-издательский центр НГУ;
630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2.