

*На правах рукописи*

**Морозова Марианна Михайловна**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ  
ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ ОПЦИОНОВ  
НА РОССИЙСКОМ СРОЧНОМ РЫНКЕ**

Специальность 08.00.13 – математические и  
инструментальные методы экономики

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата экономических наук

Новосибирск  
2011

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук Институте экономики и организации промышленного производства Сибирского отделения РАН (УРАН ИЭОПП СО РАН)

Научный руководитель: кандидат экономических наук, доцент  
Блам Юрий Шабсович

Официальные оппоненты: доктор экономических наук, профессор  
Коломак Евгения Анатольевна

кандидат физико-математических наук,  
доцент Бусыгин Владимир Петрович

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Алтайский государственный университет»

Защита состоится 9 декабря 2011 года в 16 часов на заседании Диссертационного совета Д 003.001.02 при ИЭОПП СО РАН по адресу: 630090, Новосибирск, проспект Академика Лаврентьева, 17.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИЭОПП СО РАН.

Автореферат разослан 8 ноября 2011 года

Ученый секретарь диссертационного  
совета, к.э.н.

М.А. Ягольницер

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы исследования.** Последние десятилетия стали периодом интенсивного развития срочного сегмента финансового рынка, важной экономической функцией которого является функция первичного ценообразования. В цене срочного контракта заложена информация относительно рыночных перспектив базового актива, поэтому их эффективное ценообразование играет определяющую роль в функционировании финансового рынка. Однако на сегодняшний день процесс развития российского срочного рынка сдерживают проблемы оценки стоимости опционов.

С научной точки зрения неэффективное ценообразование выражается в несоответствии между эмпирическими свойствами динамики цен базовых активов и свойствами используемых моделей. В основе традиционных моделей оценки справедливой стоимости опционов лежит предположения о нормальном распределении доходностей базовых активов и полноте рынка. Однако чрезвычайно большие ценовые движения (скачки) не столь редки, как предсказывает нормальная кривая. Скачкообразные изменения приводят к неполноте рынка, т. е. невозможности полного хеджирования рисков. Ценообразование, основанное исключительно на нормальном распределении, не способно адекватно отражать все многообразие рынка, что приводит к серьезным неточностям в оценках.

С практической точки зрения существующее рыночное ценообразование опционов приводит к искаженным ожиданиям участников относительно будущего состояния рыночной динамики базового актива, что снижает активность торгов и увеличивает риски инвестиционной деятельности.

Актуальность исследования обусловлена высокой практической значимостью и недостаточной проработкой проблемы оценки справедливой стоимости опционов на неполном неликвидном рынке. Эта проблема особенно актуальна в условиях развивающегося российского срочного рынка, что вызвало необходимость в создании эффективного инструмента адекватной оценки стоимости опционных контрактов.

**Степень разработанности проблемы.** Изучением теоретических вопросов функционирования срочного рынка и формирования цен производных активов занимались такие классики экономической науки как Дж. М. Кейнс, Дж. Р. Хикс, Н. Калдор, К. Эрроу, Д. Дебре.

Теория производных финансовых инструментов, в частности, опционов представлена в трудах П. Джеймса, Дж. Халла, Э. Хауга, С. Нэфчи, Л. Макмиллана, С. Вайна, Ш. Натенберга, А. Бэйрда, М. Чекулаева, А. Н. Буренина, А. Б. Фельдмана, А. Н. Балабушкина.

Решение задачи ценообразования опционных контрактов обусловило появление целого ряда исследовательских работ, посвященных построению реалистичных моделей расчета справедливой стоимости опционов. Под

справедливой понимается такая цена опциона, которая исключает проведение сделок, позволяющих получить прибыль лишь за счет неправильной оценки опциона, т.е. не создающая возможностей для арбитража. Математический аппарат оценки стоимости производных финансовых инструментов развит такими учеными как П. Блэк, М. Шоулз, Дж. Кокс, С. Росс, М. Рубинштейн, Р. Мертон, С. Г. Коу, Р. Джэрроу, Д. Хиз. Модели оценки опционов, охватывающие современные достижения в области ценового моделирования, изложены в работах: К. Конолли, М. Томсета, Р. Колба, А. Н. Ширяева, А. Моргона, М. Гармана, С. Колхагена, Р. Ролла, Р. Джеске, Х. Джонсона, Э. Дермана, У. Тойя.

В ценообразовании опционов первоочередной задачей является построение достоверного вероятностного прогноза цены базового актива. Вопросы моделирования ценовой динамики отражены в трудах ученых: Л. Башелье, П. Самуэльсон, Ч. Доу, которые описывали ценовое движение гауссовскими процессами. Начиная с 90-х гг. широко используются негауссовские безгранично делимые распределения, которые представлены в работах Р. Конта, П. Танкова, К. Сато, В. Шоутенса, Д. Апплебаума, О. Баендорф-Нильсона, Дж. Бертоина, С. З. Боярченко, С. И. Левандорского, Д. Мадана, Е. Сенете, Е. Мордеки, Г. Бакши, З. Чена и др.

Среди общего класса безгранично делимых распределений особого внимания заслуживает класс устойчивых распределений. Наибольший вклад в развитие теории устойчивых распределений внесли работы В. М. Золотарева, В. В. Учайкина, Дж. П. Нолана, Б. Мальденброта, Г. Самординского, М. Такку.

На протяжении последних лет исследования в области статистического моделирования привели к появлению безгранично делимых модификаций устойчивого распределения. Наиболее известными являются работы С. Рачева, Ч. Менна, Ф. Фабози, Й. Кима, Дж. Росинского, Д. Чанга, И. Копонена.

Необходимость совершенствования подходов к оценке справедливой стоимости опционов на неполных и неликвидных рынках обуславливает актуальность темы исследования, предопределяя ее структуру, цель и задачи.

**Цель диссертационного исследования** состоит в разработке методического подхода к оценке справедливой стоимости опционов в условиях российского срочного рынка.

Сформулированная цель предполагает решение следующих **задач**:

1. Выявить проблемы существующего ценообразования опционов на российском срочном рынке и определить перспективные направления развития математического аппарата оценки стоимости опционов.

2. Обосновать выбор безгранично делимых распределений для моделирования цен базовых активов, позволяющих адекватно отразить эмпирические свойства их динамики.

3. Предложить процедуру поиска риск-нейтральной меры в условиях неликвидного срочного рынка.

4. Разработать основанную на риск-нейтральном подходе методику определения справедливой цены опциона, отражающую специфику российского срочного рынка.

5. Выполнить численное моделирование справедливой стоимости опционов на основе разработанного методического подхода и осуществить сравнительный анализ модельных и рыночных цен.

6. Провести анализ функционирования срочного рынка в рамках гипотез относительно эффективности ценообразования, обращающихся на нем производных инструментов на разных временных периодах рыночной динамики.

**Объект исследования** — ценообразование опционов на российском срочном рынке.

**Предмет исследования** — модели и методы оценки справедливой стоимости опционов на неполном и неликвидном рынке.

**Область исследования** соответствует паспорту специальности ВАК РФ 08.00.13 «Математические и инструментальные методы экономики» пунктам 1.1. Разработка и развитие математического аппарата анализа экономических систем: математической экономики, эконометрики, прикладной статистики, теории игр, оптимизации, теории принятия решений, дискретной математики и других методов, используемых в экономико-математическом моделировании, 1.6. Математический анализ и моделирование процессов в финансовом секторе экономики, развитие метода финансовой математики и актуарных расчетов.

**Теоретической и методологической основой** являются исследования в области стохастической финансовой математики, математической статистики и эконометрики, теории вероятностей и случайных процессов, методы статистического анализа финансовых временных рядов, численные методы оценки параметров и характеристик распределений доходностей финансовых активов.

Программный комплекс статистического анализа финансовых временных рядов и моделирования справедливой стоимости производных активов реализован с использованием пакетов прикладных программ MS Excel, Oracle Crystal Ball, MathWorks MATLAB, IHS Econometric Views, Matrixer.

**Информационную базу исследования** составили:

— данные информационно-аналитических материалов по исследуемой проблеме, представленные в научной литературе, периодической печати и сети интернет;

— статистические источники в виде итогов торгов срочного сектора фондовой биржи РТС – ФОРТС ([www.forts.ru](http://www.forts.ru)), и информация, полученная из отчетов брокерской фирмы ФИНАМ ([www.finam.ru](http://www.finam.ru)).

**Научная новизна работы** заключается в разработке методического подхода к оценке справедливой стоимости опционных контрактов с учетом специфики российского срочного рынка. Новыми являются следующие результаты:

1. Обосновано использование моделей динамики цен базовых активов, основанных на безгранично делимых распределениях, которые позволяют учесть скачкообразные изменения финансовых показателей на неполных рынках, в отличие от модели геометрического броуновского движения.

2. Предложена процедура оценки рыночной меры, в основу которой положена калибровка моделируемых безгранично делимых распределений к эмпирическим распределениям доходностей базовых активов, в условиях, когда калибровка модельных и рыночных цен опционов невозможна (в случае неликвидного рынка), либо не позволяет получить корректные оценки меры (в случае неэффективного рынка).

3. В рамках риск-нейтрального подхода разработана методика оценки справедливой стоимости производных инструментов на неполном и неликвидном рынке.

4. На основе сопоставления справедливых цен опционов с их рыночными котировками показано, что на российском рынке опционов наблюдаются нереализуемые арбитражные возможности, препятствующие обеспечению эффективности рынка и выполнению им информационной функции.

**Теоретическая значимость результатов.** Сформулированные в диссертационном исследовании положения и выводы развивают методологическую базу анализа динамики цен финансовых активов и оценки справедливой стоимости производных инструментов, адаптируя ее к российским условиям.

**Практическая значимость результатов.** Разработанный методический подход дает участникам срочного рынка математически корректный инструмент оценки справедливой стоимости производных активов, имеющий: а) более реалистичные предпосылки по сравнению с существующими методами; б) потенциал практического применения в деятельности частных и институциональных инвесторов, давая им возможность принимать обоснованные решения по хеджированию риска и планированию своей деятельности в будущем, что, в свою очередь, поможет привлечь на опционный рынок новых участников и повысить его ликвидность и эффективность.

Результаты исследования также могут быть использованы в учебных дисциплинах «Финансовая математика» и «Экономико-математическое моделирование» для студентов экономических специальностей.

**Апробация работы.** Основные положения и результаты исследования обсуждались на международной научной конференции «Студент и научно-технический прогресс» (г. Новосибирск, 2008), конференции студентов и аспирантов (с международным участием) «Экономика и бизнес: позиция молодых ученых» (г. Барнаул, 2008, 2009), конференции молодых ученых «Социально-экономическое развитие России: идеи молодых ученых» (ИЭОПП СО РАН, г. Новосибирск, 2008–2010), методическом семинаре в

Институте Экономики и организации промышленного производства СО РАН (г. Новосибирск, 2009), Первом Российском Экономическом Конгрессе, Новая Экономическая Ассоциация (г. Москва, 2009), Всероссийском Симпозиуме с международным участием «Сложные системы в экстремальных условиях» (г. Красноярск, 2010), IX Международном Симпозиуме «Экономика и Бизнес: Экономическое Развитие и Рост» (г. Несебр, Болгария, 2010), Пермской зимней школе: «Рыночный риск» (г. Пермь, 2011).

В работе ООО «УК «Теллура Капитал» использован модельный комплекс как аналитический инструмент для оценки справедливой стоимости производных финансовых инструментов.

Материалы, методы и результаты диссертации используются на кафедре «Математическое моделирование бизнес-процессов» Сибирского государственного университета телекоммуникаций и информатики в преподавании учебных дисциплин «Модели рискованных инвестиционных процессов» и «Интегрированный риск-менеджмент на уровне предприятия».

Внедрение результатов исследования в указанных организациях подтверждено соответствующими документами.

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано двадцать работ общим объемом 8.2 п.л., в том числе две статьи в журналах, рекомендованных ВАК для публикаций результатов диссертаций (1.2 а.л.), семнадцать в сборниках материалов и научных трудов конференций (5.9 а.л.) и одна в монографии (1.1 а.л.).

### **Содержание диссертационного исследования**

Структура диссертации обусловлена целью, задачами и логикой исследования. Работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка используемой литературы и 9 приложений.

**В первой главе** выделены проблемы ценообразования опционов на российском срочном рынке. Рассмотрены модели ценообразования опционов, используемые для описания полных и неполных рынков, их предпосылки, возможности и границы применения, а также основные эмпирические свойства динамики цен базовых активов, которые необходимо учитывать при выборе моделей для оценки меры рынка и справедливой стоимости опциона.

**Во второй главе** представлена разработанная методика оценки справедливой стоимости опционов, основанная на риск-нейтральном подходе. Приведены характеристики и статистические свойства класса процессов Леви для описания движения цен базовых активов. Обосновано использование математического аппарата эконометрического моделирования для оценки параметров распределений цен базовых активов и риск-нейтрального моделирования для задач перехода к эквивалентным мартингальным мерам и вычисления безарбитражных цен опционов.

**В третьей главе** на основе предложенной методики проведено численное моделирование справедливых цен наиболее ликвидных опционных контракта, торгуемых на срочной площадке биржи РТС (базовыми активами являются фьючерс на индекс РТС, фьючерс на акции ОАО «Газпром» и фьючерс на акции ОАО «Сбербанк»). Получены результаты сопоставления динамики рыночных и справедливых цен для рассматриваемых инструментов на различных временных отрезках и различных ценах исполнения. Проведено тестирование выдвинутых гипотез относительно эффективности работы срочного рынка, характеризующих его информационную функцию.

## **ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ**

*1. Показано, что российский срочный рынок является неполным (не позволяет полностью хеджировать риски). В этих условиях цены опционов, рассчитанные с помощью модели полного рынка, формируют у его участников нереалистичные ожидания относительно будущих исходов, поскольку заложенное в модель цен базовых активов логнормальное распределение неадекватно отражает процессы на рынке базовых активов.*

Модели ценообразования опционов, основанные на диффузионных процессах логарифмов доходностей базовых активов, применимы только в условиях полного рынка. Реальные финансовые рынки не являются полными, так как риски возникающих скачков в динамике процесса, которые приводят к существенным изменениям цен активов, становится невозможно полностью хеджировать. Проявления скачкообразности изменений цен активов выражаются в том, что эмпирические плотности вероятностей доходностей активов имеют более толстые хвосты (убывают намного «медленнее», чем у нормального) и более острую вершину, чем плотность нормального распределения и описываются степенным законом (рис. 1).

Подтверждение неполноты российского рынка базовых активов строится на статистической проверке соответствия эмпирического и нормального распределений, которая включает статистический выбор закона распределения базовых активов, адекватно описывающего эмпирическое распределение, из конечного числа рассматриваемых альтернатив и сравнение его с нормальным. В случае, когда нормальное распределение статистически отвергается, рынок этого актива будет определен как неполный.

Анализ свойства неполноты российского рынка базовых активов проведен на примере базовых активов самых ликвидных опционных контрактов, торгуемых на срочной площадке биржи РТС (занимают 90% опционного рынка) (табл. 1). Проверка исходных рядов цен фьючерсных контрактов с помощью критериев ADF и KPSS показала их нестационарность, поэтому осуществлен переход к стационарным логарифмическим доходностям.



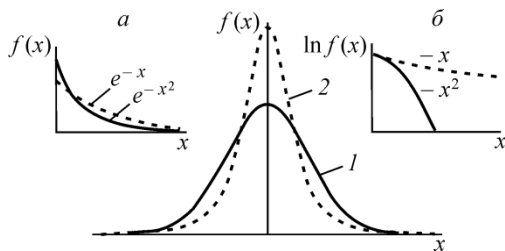


Рис. 1. Степенной (1) и нормальной (2) закон распределения логарифмических доходностей и их правые хвосты: *a* — в обычной шкале; *б* — в логарифмической шкале

ТАБЛИЦА 1. Исходные данные

Производный инструмент $C_t(H)$	Базовый актив $S_t$	Диапазон выборки активов	
		базовых $t = -n, \dots, 0$	производных $t = 0, \dots, T$
Опцион на фьючерс на индекс РТС	Фьючерс на индекс РТС	03.08.05 – 08.02.10	16.09.08 – 14.04.10
Опцион на фьючерс на акции ОАО «Газпром»	Фьючерс на акции ОАО «Газпром»	19.01.06 – 08.02.10	15.11.06 – 12.04.10
Опцион на фьючерс на акции ОАО «Сбербанк»	Фьючерс на акции ОАО «Сбербанк»	10.10.05 – 08.02.10	29.01.07 – 12.04.10

Анализ ядерных оценок плотностей, построенных по соответствующим историческим выборкам логарифмических доходностей длиной  $n$ , показал, что эмпирическое распределение для фьючерсных контрактов на индекс РТС и акции ОАО «Газпром» характеризуется «толстыми хвостами» и низким пиком, что указывает на преобладание больших (по модулю) ценовых движений над относительно малыми. Для значительной части выборок характерна асимметрия, в ряде случаев эмпирическое распределение смещено влево (относительно нормального), что свидетельствует о подавлении положительных темпов прироста цен фьючерсов отрицательными.

Формальная проверка логарифмических доходностей на нормальность на основе критерия Жарка – Беры, позволила отвергнуть гипотезу о нормальности: в 95% случаев гипотеза о равенстве эксцесса и асимметрии нулю отвергается с вероятностью ошибки I рода не более 1%.

Проведенный анализ выявил периодические расхождения в поведении функции плотности нормального и эмпирического распределений. Характер этих расхождений может отличаться для различных базовых активов, но вывод относительно выявленных эмпирических особенностей будет одинаковым — логарифмические доходности базовых активов не описываются нормальным распределением, т. е. российский фьючерсный рынок является неполным, а модель ценообразования опционов Блэка – Шоулза на таком рынке не может давать адекватную оценку их справедливой стоимости.

**2. Для моделирования динамики цен базовых активов предложено использовать ряд моделей, основанных на экспоненциальных процессах Леви, которые позволяют учесть скачкообразные изменения цен, что невозможно осуществить в рамках диффузионной модели геометрического броуновского движения. Спецификация скачкообразной компоненты в процессе ценовых изменений позволяет формализовать неполноту рынка (нехеджируемый риск).**

Полученные результаты проверки неполноты российского фьючерсного рынка вызвали потребность в поиске других классов распределений для моделирования цен базовых активов и построения моделей ценообразования опционов. В работе обоснован выбор класса процессов Леви, которые взаимно однозначно определяются безгранично делимыми распределениями. Во-первых, этот класс позволяет моделировать большинство эмпирических закономерностей, наблюдаемых на финансовых рынках. Во-вторых, свойство безграничной делимости дает возможность включить в модель нехеджируемый риск в виде скачкообразной компоненты процесса логарифмических доходностей активов и таким образом разделить риск на хеджируемую и нехеджируемую составляющие.

Процесс Леви имеет вид:  $X_t = \gamma + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} J_i$ , где  $\gamma$  — сдвиг (среднее диффузионной части процесса);  $\sigma$  — среднее квадратическое отклонение диффузионной части процесса;  $W_t$  — процесс Винера;  $\sum_{i=1}^{N_t} J_i$  — скачкообразная компонента (показывает частоту появления скачков и их величину). Количество скачков  $N_t$  следует процессу Пуассона с параметром  $\lambda > 0$ , который характеризует интенсивность скачкообразной составляющей. Скачки  $J_i$  — независимые и одинаково распределенные случайные величины, характеризующиеся плотностью распределения, называемой мерой Леви.

В зависимости от соотношения диффузионной и скачкообразной компоненты процессы Леви делятся на:

— чисто диффузионные, в рамках которых цена актива изменяется согласно геометрическому броуновскому движению;

— скачкообразной диффузии, в которых цена актива изменяется непрерывно, но иногда испытывает скачки, которые описываются составным процессом Пуассона; данный подкласс является наиболее общим видом модели Леви;

— чисто скачкообразные, в которых логарифм темпа роста цены актива описывается как последовательность скачков различной величины.

Поскольку ценовая динамика финансовых активов в различные временные периоды имеет свои особенности, в работе предлагается использовать множество случайных процессов для описания рыночных ситуаций.

В этом контексте преимуществом процессов Леви является их возможность формализации скачков разной величины: от небольших — в диффузионном движении до чрезвычайно больших — в нестабильные периоды рыночной конъюнктуры, характеризующиеся наступлением экстремальных событий.

Среди распределений, применяемых в моделировании доходностей с толстыми хвостами, устойчивое распределение представляет собой наиболее широкий класс устойчивых к суммированию распределений и включает нормальное распределение как частный случай. Только для нормального и устойчивого распределения выполняются предельные теоремы (ЦПТ — для нормального с конечной дисперсией и обобщенная ЦПТ — для устойчивого с бесконечной дисперсией). Различные стохастические процессы сходятся к этим асимптотически притягивающим вероятностным распределениям, чем и объясняется их широкое использование для финансового моделирования.

Однако плотность нормального распределения слишком «тонкохвоста», чтобы быть подходящей моделью для распределения финансовых доходностей, а плотность устойчивого распределения слишком «толстохвоста», что приводит к бесконечной дисперсии приращений цены. В связи с этим с начала 90-х гг. предложено несколько семейств процессов Леви с плотностью вероятности, имеющей «полутолстые хвосты», которые статистически лучше аппроксимируют динамику исторических доходностей, а оценки опционов, основанные на этих процессах дают более адекватные результаты, чем предельные модели.

В 2004–2007 гг. разработаны модели, в которых эмпирические распределения описываются как толстохвостые в смысле степенного закона, но с конечной дисперсией — модификации устойчивого распределения. Они позволяют получить конечные моменты распределений через процедуру облегчения хвостов плотностей вероятности, основанные на методах замедления хвостов и сглаживания. В работе систематизированы и использованы как известные, так и новые разработки в области статистического моделирования эмпирических распределений финансовых активов (рис. 2).

Использование этого множества распределений в моделях динамики цен активов помогает описать особенности российского финансового рынка, характеризующегося резкими и сильными ценовыми колебаниями.

### ***3. Обоснован подход к оценке риск-нейтральной меры неликвидного рынка производных инструментов на основе калибровки модельных и рыночных цен базовых активов.***

Расчет справедливой цены опциона на неполном рынке проводится в рамках риск-нейтрального подхода, в котором цену производного инструмента можно определить как математическое ожидание будущих выплат этого инструмента держателю. В основе подхода лежит принцип отсутствия арбитражных возможностей, согласно которому цены производных активов должны быть такими, чтобы у участников рынка не возникало возможно-

стей формирования стратегий инвестирования, систематически приводящим к выигрышам без риска. Такие цены будем называть справедливыми (безарбитражными, риск-нейтральными). Следовательно, математическое ожидание вычисляется на основе вероятностей будущих событий, т.е. некоторой вероятностной меры, которая содержит информацию о текущей и будущей динамике базового актива.



Рис. 2. Классификация безгранично делимых распределений, применяемых в моделировании динамики цен финансовых активов

Принцип отсутствия арбитража связан со свойствами вероятностной меры, лежащей в основе вычисления справедливых цен активов — риск-нейтральной меры рынка — фундаментальными теоремами ценообразования. Для выполнения принципа отсутствия арбитражных возможностей в основе цен производных активов должна лежать мера, эквивалентная и мартингальная по отношению к истинным вероятностям исходов на рынке базовых активов.

Эквивалентность означает, что для  $\forall \omega \in \Omega$ , если  $P(\omega)=0 \Leftrightarrow Q(\omega)=0$ , то  $P(\omega) \sim Q(\omega)$ , где  $\Omega$  — множество рыночных траекторий (исходов)  $\omega \in \Omega$ ,  $P(\omega)$  — рыночная вероятностная мера;  $Q(\omega)$  — мера, лежащая в основе ценообразования производных активов. Если дополнительно выполняется условие  $\forall t, E^Q(S_{t+1}|I_t)=S_t$ , где  $S_t(\omega)$  — процесс цены базового актива, описываемый мерой  $P(\omega)$ ;  $I_t$  — информация о ценах активов, известная на момент  $t$ , то мера  $Q(\omega)$  является мартингальной.

При выполнении свойства мартингалности и эквивалентности риск-нейтральная стоимость производного инструмента вычисляется по правилу  $\Pi^*(H(\omega)) = E^Q H(\omega)$ , где  $H(\omega)$  — функция выплат рассматриваемого инструмента (денежный выигрыш, который получит держатель при реализации рыночного исхода  $\omega$ ).

Первоочередная задача в оценке справедливой стоимости производного инструмента — определение характеристик риск-нейтральной меры, удовлетворяющей свойствам мартингалности и эквивалентности. На развитых рынках при выборе эквивалентной мартингалной меры принято использовать для калибровки модельных цен рыночные цены опционов. При таком подходе срочный рынок рассматривается как эффективно функционирующий, т. е. рыночные цены производных инструментов систематически являются безарбитражными. Арбитражные возможности, если и возникают в соответствии со стохастической природой колебаний цен базовых активов, то при достаточной ликвидности под давлением спроса и предложения в кратчайшие сроки исчезают, а цены возвращаются к своему справедливому уровню. Характеристики меры  $Q(\omega)$ , лежащей в основе образования этих цен, можно определить, решив задачу калибровки предварительно выбранной модели меры (например, геометрическое броуновское движение для полного рынка или процесс Леви для неполного):  $\|\Pi^M(H) - E^Q H\|_H \rightarrow \min_Q$ , где

$\Pi^M(H)$  — наблюдаемая рыночная цена некоторого производного актива  $H$ ;  $\|\cdot\|_H$  — некоторая мера расстояния между рыночными и теоретическими (справедливыми) ценами, заданная на множестве рассматриваемых производных активов  $H$ .

Низкая ликвидность российского опционного рынка и высокая ликвидность фьючерсного рынка (рынка базовых активов) предопределила использование подхода к вычислению риск-нейтральной меры рынка и справедливых цен производных инструментов на основе рынка базовых активов. При этом данный подход подразумевает двухэтапный переход к риск-нейтральной мере. На первом — выбор параметризации меры  $P(\omega)$  из класса безгранично делимых распределений. На втором — переход к риск-нейтральной (эквивалентной и мартингалной) мере рынка  $Q(\omega)$ .

Сначала определяются характеристики объективной рыночной меры из решения задачи калибровки теоретического закона распределения цен базовых активов к эмпирическому:  $\|F^M - F^P\| \rightarrow \min_P$ , где  $F^M$  — наблюдаемые характеристики закона распределения цены некоторого базового актива (например, эмпирическая функция распределения или эмпирическая характери-

стическая функция логарифмических доходностей базового актива  $S_t$ );  $F^P$  — соответствующие теоретические (модельные) характеристики рыночной меры  $P(\omega)$ . Решение данной задачи подразумевает выбор конкретной параметризации меры  $P(\omega)$  из класса безгранично делимых распределений.

Для оценки параметров используется метод максимального правдоподобия (ММП), однако поскольку у большинства моделей не существует аналитической функции плотности распределения вероятности, необходимой для построения функции максимального правдоподобия, применяется метод вычисления плотности из характеристической функции на основе быстрого преобразования Фурье. Окончательный выбор спецификации процесса из конкурирующих осуществляется на основе информационного критерия Акаике. Расчеты реализованы в среде The MathWorks MATLAB. Пример эмпирической плотности распределения вероятностей логарифмических доходностей в сравнении с ММП оценкой и нормальным распределением показан на рис. 3. Статистика выбираемых моделей описания логарифмических доходностей базовых активов приведена в табл. 2.

В работе показано, что стабильные этапы функционирования рынка описываются процессами, которые включают наряду с броуновской компонентой умеренные (с конечной активностью) скачки. На рассматриваемом временном горизонте чисто диффузионное поведение ценовых приращений наблюдалось в 14% случаев, а диффузионно-скачкообразное — в более 10%. В нестабильные периоды движения цен соответствуют диффузионно-скачкообразным процессам примерно в 87% случаев, при этом в ~ 80% выбираются модели с бесконечной активностью — риски изменения цен в такие периоды высоки и практически не поддаются хеджированию.

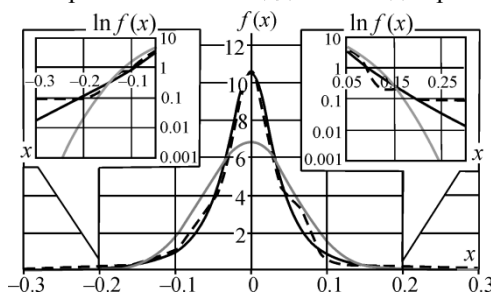


Рис. 3. Распределения логарифмических доходностей фьючерса на индекс РТС за период 28.05.08 – 10.09.09: — ММП оценка; — плотность нормального распределения; ---- ядерная оценка плотности эмпирического распределения

Обладая информацией о структуре рыночной меры, участники срочного рынка смогут принимать более обоснованные решения о потенциале опционных контрактов и стратегий хеджирования.

ТАБЛИЦА 2. Статистика выбираемых распределений логарифмических доходностей базовых активов

№	Распределение	Фьючерсный контракт, %			
		на индекс РТС	на акции ОАО «Газпром»	на акции ОАО «Сбербанк»	всего
1	Нормальное	21	12.9	6	14.1
2	Модель Мертона	2	4	1	2.2
3	Модель Коу	5	3.4	4.4	4.3
4	$\alpha$ -устойчивое	4	8.1	2	4.6
5	Гамма дисперсии	14	18.9	16	16
6	Нормально обратное гауссовское	20	13.5	16.2	16.9
7	Гиперболическое	11	—	8.7	7
8	Микснера	—	—	—	—
9	CGMY	6	12.1	9.5	8.8
10	Модифицированное замедленное устойчивое	11	17.6	22.9	16.5
11	Замедленное Кима и Рачева	6	9.5	13.3	9.2
12	Стьюдента	—	—	—	—

**4. Разработанная методика определения справедливой цены производных инструментов на основе риск-нейтрального подхода позволяет:**

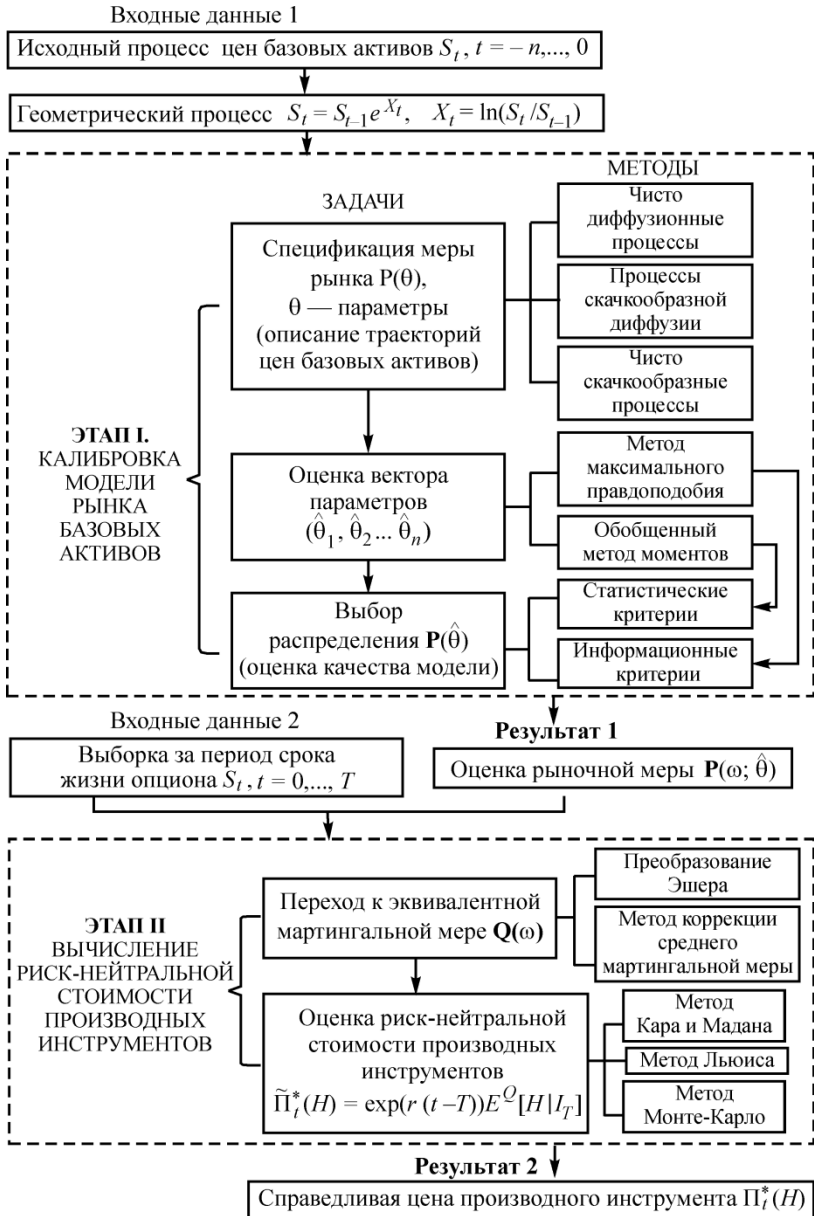
— **находить законы распределений цен базовых активов, отвечающих эмпирическим свойствам и способных давать адекватное представление вероятностной меры рынка базовых активов;**

— **оценивать стоимости производных инструментов на неполных рынках для произвольных значений цен исполнения;**

— **определять степень соответствия рыночных цен опционов их безарбитражным оценкам.**

Предлагаемая методика вычисления справедливой цены опционов на неполном рынке, учитывающая особенности текущего этапа развития рынков базовых и производных активов включает два этапа (рис. 4).

На первом этапе осуществляется калибровка модели рынка базовых активов по описанной в Положении 3 схеме, результатом которой является оценка вероятностей рыночных исходов  $P(\omega)$ . Однако, чтобы воспользоваться риск-нейтральным правилом ценообразования, необходимо вычислить эквивалентную мартингальную меру. Второй этап заключается в оценке риск-нейтральной меры  $Q(\omega)$  и вычислении справедливых цен производных активов. Для этого предложено использовать метод Монте-Карло с коррекцией среднего распределения доходностей, в результате применения которого генерируются траектории цен базовых активов, соответствующие не исходной оценке рыночной меры  $P(\omega)$ , а ее эквивалентной и мартингальной замене  $Q(\omega)$ , что позволяет считать соответствующие оценки математических ожиданий будущих выплат по производным активам оценкой их справедливых стоимостей.





Процедура вычисления справедливых цен состоит из двух шагов. Первый шаг — подготовка перехода к эквивалентной мартигальной мере, т. е. в соответствии с рыночной моделью  $P(\omega)$  производится симуляция траекторий доходностей базового актива  $X_t$  на срок обращения опциона  $T$ . На основе полученных смоделированных доходностей строятся траектории цен базовых активов  $S_t^P, t=1, \dots, T$ . Затем находятся математические ожидания цены базового актива на момент экспирации опциона, условные по информации  $I_t$ , доступной на каждый момент времени в течение всего срока жизни опциона:  $\tilde{S}_T^{e,t} = E^P(S_T | I_t), t=1, \dots, T$ .

На втором шаге эти математические ожидания используются для перехода к мартигальному процессу. Для выполнения свойства мартигальности вычисляются траектории цен базовых активов со сдвигом  $\tilde{S}_t^Q = S_t^P - \tilde{S}_T^{e,t} + S_{t-1}$ . По построению этот процесс (и, следовательно, лежащая в его основе мера  $Q(\omega)$ ) является мартигалом. Расчет безарбитражных цен производных активов осуществляется на основе полученных методом Монте-Карло симуляций мартигальных процессов цен базовых активов. Для опционов колл европейского и американского типов формула справедливой цены имеет вид:

$$C_{t;Call}^* = \Pi^Q(H_{Call}(K)) = E H_{Call}(K) = E(\tilde{S}_{t,T}^Q - K)^+ = \sum_{l=1}^L \frac{(S_{t,l}^P - \tilde{S}_T^{e,T} + S_{t-1} - K)^+}{L},$$

где  $L$  — количество симуляций в процедуре Монте-Карло;  $K$  — цена исполнения опциона;  $S_{t,l}^P$  —  $l$ -я симуляция цены базового актива  $S_t^P, l=1, \dots, L$ .

При переходе к риск-нейтральной мере рынка и вычислении справедливых цен для каждого опциона проводилось по 10 000 симуляций траекторий цены базового актива на период жизни опциона. Реализация процедур метода Монте-Карло выполнена в среде Oracle Crystal Ball.

**5. Выдвинуты три гипотезы об эффективности ценообразования на российском срочном рынке. Показано, что на нем наблюдаются систематические отличия рыночных цен опционов от справедливых, которые из-за отсутствия механизмов конвергенции, не приводят к коррекции цены в направлении безарбитражной. Продемонстрировано, что текущее состояние рынка не позволяет его участникам использовать рыночные цены опционов в качестве информационных сигналов о будущей динамике развития базового рынка.**

На основе разработанной методики проведена оценка справедливой стоимости опционов, обращающихся на российском срочном рынке. В работе проанализировано 1473 опционных контракта, из которых для расчетов

выбрано 248. Рассматриваемые контракты торговались на ФОРТС в период с 2005 по 2010 гг. и имели срок жизни  $T$  от 24 торговых дней до 24 месяцев. В результате численного моделирования получены графики движения справедливых цен опционов. На рис. 5 для примера представлена их динамика в сравнении с поведением расчетных биржевых цен и рыночных котировок.

Результаты сопоставления справедливых и расчетных биржевых цен опционов позволяют сделать следующие выводы:

1) справедливые цены отличаются от расчетной цены биржи. Это означает, что в динамике цены базовых активов с относительно высокой вероятностью происходят экстремальные события, которые искажают ожидаемое значение цены базового актива на момент экспирации производного;

2) справедливые цены тем сильнее отличаются от расчетных цен биржи, чем сильнее отличается распределение доходностей базовых активов от нормального;

3) расчетная и справедливая цены хотя и сходятся с приближением экспирации, однако это схождение происходит не как на эффективном рынке. Оно обусловлено элементарными правилами ценообразования производных активов: чем ближе срок экспирации, тем меньшее влияние на ожидаемые выплаты имеют относительно редкие скачки и бóльший вес — диффузионная часть.

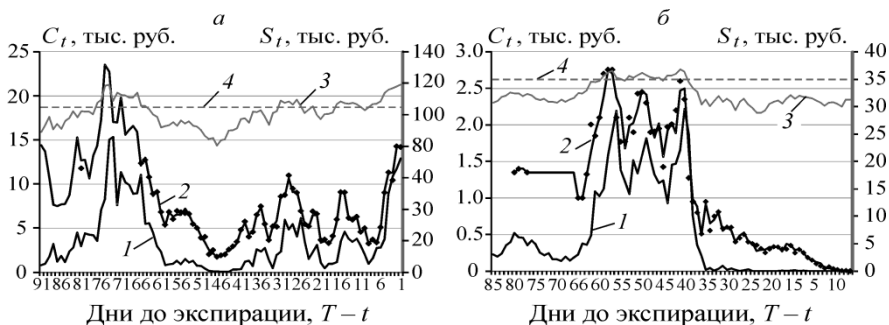


Рис. 5. Результаты сравнения цен опционных контрактов:  $a$  — на фьючерс на индекс РТС,  $T = 91$  день (07.05.09 — 14.09.09),  $K = 110\,000$ ;  $b$  — на фьючерс на акции ОАО «Газпром»,  $T = 85$  день (08.10.08 — 01.01.09),  $K = 35\,000$ ; 1 — справедливая цена опциона; 2 — цена опциона Блэка-Шоулза; 3 — цена фьючерсного контракта; 4 — цена исполнения; ◆ — рыночные котировки

В зависимости от соотношения цен опционов (рыночных и справедливых) можно выделить три состояния срочного рынка, формирующие следующие гипотезы (рис. 6):

*Гипотеза 0 ( $H_0$ ): рынок эффективный.* Теоретическая цена периодически отличается от текущего рыночного значения, участники пользуются возможностью арбитража, возникающего на их разнице и под корректив-

рующим воздействием постоянной активности арбитражеров рыночная цена быстро сходится к справедливой — устанавливается эффективное рыночное равновесие.

*Гипотеза 1 (H<sub>1</sub>): рынок неликвидный.* Сделки на рынке происходят не систематически, поскольку при открытии и закрытии опционных контрактов возникают трудности, связанные с поиском контрагента. Рыночные цены сильно отличаются от справедливых, и поэтому ожидаемой выгоды от хеджирования и арбитражных возможностей недостаточно, чтобы мотивировать участников к торговле на срочном рынке. В данном случае цены неадекватно отражают рыночную информацию и не являются сигналами для входа участников на рынок, следовательно, ожидаемой коррекции цены в направлении ликвидации арбитражных возможностей не происходит.

*Гипотеза 2 (H<sub>2</sub>): рынок неэффективный.* Торги происходят систематически, но из-за асимметрии информации участники торгов не могут правильно оценить арбитражные возможности, риски вложений в активы и потенциалы хеджирования, тем самым формируются нерациональные ожидания относительно будущей динамики развития рынка. Следовательно, торги происходят по ценам, отличным от справедливых.



Рис. 6. Гипотезы об эффективности ценообразования на российском срочном рынке

Полученные в работе результаты сопоставления справедливых оценок опционов с рыночными котировками систематизированы по принадлежности к выдвинутым гипотезам (табл. 3). Они показывают, что на российском срочном рынке наличие арбитражных возможностей не приводит к росту активности торгов с последующей коррекцией рыночных цен в направлении справедливых, что порождает нереалистичные ожидания участников о будущей динамике базового рынка и в ряде случаев приводит к торговле по заведомо несправедливым ценам (неэффективный рынок  $H_2$ ) или создает высокий барьер для входа участников на рынок из-за существенной разницы между рыночными котировками и справедливыми ценами опционов (высокий риск ликвидности арбитражных операций, рынок неликвидный  $H_1$ ).

ТАБЛИЦА 3. Статистика соответствия исследуемых опционных контрактов выдвинутым гипотезам

Гипотеза	Оptionный контракт, %			
	на фьючерс на индекс РТС	на фьючерс на акции ОАО «Газпром»	на фьючерс на акции ОАО «Сбербанк»	всего
$H_0$	9	7	21	12
$H_1$	27	22	63	36
$H_2$	64	71	16	52

В целом, проведенное исследование выявило закономерности в поведении рыночных цен, которые подтверждают неэффективность ценообразования опционов на российском срочном рынке.

Предложенный методический подход, основанный на риск-нейтральном ценообразовании производных активов при использовании адекватной оценки рыночной меры базового рынка, позволяет в условиях неликвидного и неэффективного рынка находить справедливые цены производных активов, которые могли бы стать новым ориентиром для участников, повысив активность торгов и привлекательность опционного рынка.

## ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

### Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК:

1. Бобылев Г.В., Кузнецов А.В., Морозова М.М. *Экономическая оценка наукоемких проектов* // Регион: экономика и социология. — 2007. — № 2 (стр. 5 – 19/0.4 а.л.).
2. Морозова М.М., Пырлик В.Н. *Устойчивое распределение и его модификации и ценообразование производных финансовых активов* // Вестник НГУ. Серия: Социально-экономические науки. — 2009. — № 1 (стр. 97 – 113/0.8 а.л.).

### Статьи, публикации в материалах и трудах конференций:

3. Бобылев Г.В., Морозова М.М. *Обоснование применения и расчет мультипликатора (затраты-эффекты) на основе ряда инновационных проектов СО РАН с применением метода реальных опционов* // Материалы XLV международной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». — Новосибирск, 2007 (стр. 74 – 75/0.1 а.л.).

4. Морозова М.М., Пырлик В.Н. *Оценка инновационных проектов методом реальных опционов с учетом лептокуртозиса и улыбки волатильности* // Труды XLV международной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». — Новосибирск, 2007 (стр. 72 – 74/0.1 а.л.).

5. Морозова М.М., Пырлик В.Н. *Модификация модели реальных опционов на основе процессов Леви и ее применение к оценке инновационных проектов* // Материалы конференции студентов и аспирантов (с международным участием) «Экономика и бизнес: позиция молодых ученых». — Барнаул, 2007 (стр. 405 – 409/0.2 а.л.).

6. Морозова М.М. *Оценка возможностей влияния инновационного потенциала СО РАН на экономическое развитие. Расчет мультипликатора «затраты – эффекты» с применением метода реальных опционов* // Монография авторского коллектива ИЭОПП «Инновационный потенциал научного центра: методологические и методические проблемы анализа и оценки», выполненная по программе фундаментальных исследований РАН «Прогноз технологического развития экономики России с учетом новых мировых интеграционных процессов». Под. ред. чл.-корр. РАН Сулова В.И. — Новосибирск, 2007 (стр. 235 – 246/1.1 а.л.).

7. Морозова М.М., Пырлик В.Н. *Анализ моделей ценообразования производных финансовых инструментов с учетом характеристик эффективной работы финансовых рынков* // Материалы конференции студентов и аспирантов (с международным участием) «Экономика и бизнес: позиция молодых ученых». — Барнаул, 2008 (стр. 55 – 57/0.1 а.л.).

8. Морозова М.М., Пырлик В.Н. *Полнота и арбитражные возможности на российском финансовом рынке: подход к выявлению в рамках стохастической модели ценообразования производных инструментов* // Материалы XLVI международной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». — Новосибирск, 2008 (стр. 263 – 265/0.1 а.л.).

9. Морозова М.М., Пырлик В.Н. *Полнота и арбитражные возможности на российском финансовом рынке: подход к выявлению в рамках стохастической модели ценообразования производных инструментов* // Труды XLVI международной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». — Новосибирск, 2008 (0.3 а.л.).

10. Морозова М.М., Пырлик В.Н. *Проверка свойства полноты российского фондового и валютного рынков* // Сборник научных трудов молодых ученых «Социально-экономическое развитие России: идеи молодых ученых». — Новосибирск, 2008 (стр. 365 – 378/0.5 а.л.).

11. Морозова М.М. *Алгоритм расчета справедливой цены опциона на неполных рынках с арбитражными возможностями* // Сборник научных трудов молодых ученых «Социально-экономическое развитие России: идеи молодых ученых». — Магнитогорск, 2009 (стр. 69 – 74/ 0.4 а.л.).

12. Морозова М.М. *Моделирование динамики цены базового актива в решении задачи рациональной оценки опциона* // Статьи и тезисы докладов III Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы экономики и права в современных условиях». — Пятигорск, 2009 (стр. 155 – 162/0.6 а.л.).

13. Морозова М.М. *Проблемы ценообразования опционов на российском срочном рынке* // Сборник научных трудов молодых ученых «Социально-экономическое развитие России: идеи молодых ученых». — Новосибирск, 2010 (стр. 344 – 352/0.5 а.л.).

14. Морозова М.М. *Расчет справедливой цены опциона на неполных рынках с арбитражными возможностями* // Новая Экономическая Ассоциация — М., 2009. Режим доступа (25.10.11) <http://www.econorus.org/consp/files/bled.doc> (0.5 а.л.).

15. Морозова М.М. *Ценообразование опционов в условиях неустойчивой динамики развития финансового рынка* // Материалы Всероссийского Симпозиума с международным участием «Сложные системы в экстремальных условиях». — Красноярск, 2010 (стр. 56/0.1 а.л.).

16. Pyrlík V. N., Morozova M.M. *On effectiveness of Russian option market* // 9th International Symposium «Economy & Business: Economic Development and Growth», Bulgaria, 2010. Режим доступа (25.10.11) <http://www.science-journals.eu/economy/2010/ISP-EB-Vol4-Part3.swf> (pp. 456 – 465/0.6 а.л.).

17. Морозова М.М. *Разработка математических моделей для оценки справедливой стоимости опциона и проверки эффективности российского срочного рынка* // Тезисы докладов Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых «Социально-экономическое пространство России: инновации и современность». — Новосибирск, 2010 (стр. 113 – 114/0.1 а.л.).

18. Морозова М.М. *Моделирование справедливой стоимости опциона в условиях неликвидного рынка* // Материалы Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых «Социально-экономическое пространство России: инновации и современность». — Новосибирск, 2011 (стр. 412 – 419/0.6 а.л.).

19. Morozova M. *Options: Risk Reducing or Creating?* Perm Winter School. Edited by D. Sornette, S. Ivliev, H. Woodard. Springer, Perm, 2012 (in progress) (1.2 а.л.).

---

Подписано в печать 02.11.2011. Формат бумаги 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Печать офсетная. Уч.-изд. л. 1.25.  
Тираж 100 экз. Заказ № 276.

---

Редакционно-издательский центр Новосибирского государственного университета  
630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2